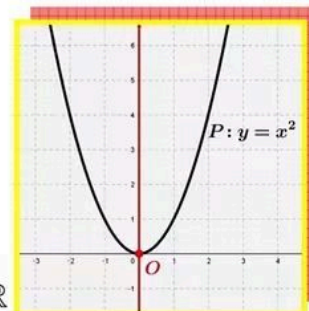


Fonction parabole

1~ Fonction carré : $x \mapsto x^2$

On appelle fonction carré la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

- La fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$
- La fonction f est paire : l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour La courbe représentative de f
- Le réel 0 est un extremum qui est dans notre cas minimum globale de f sur $\mathbb{R}$
- La courbe représentative de f est appelée parabole
- La droite $y = 0$ est appelée Axe du parabole P est le point O est appelé sommet du parabole



2~ Fonction de type : $x \mapsto ax^2$; $a \in \mathbb{R}^*$

Fonction de référence : Parabole

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$; $a \in \mathbb{R}^*$

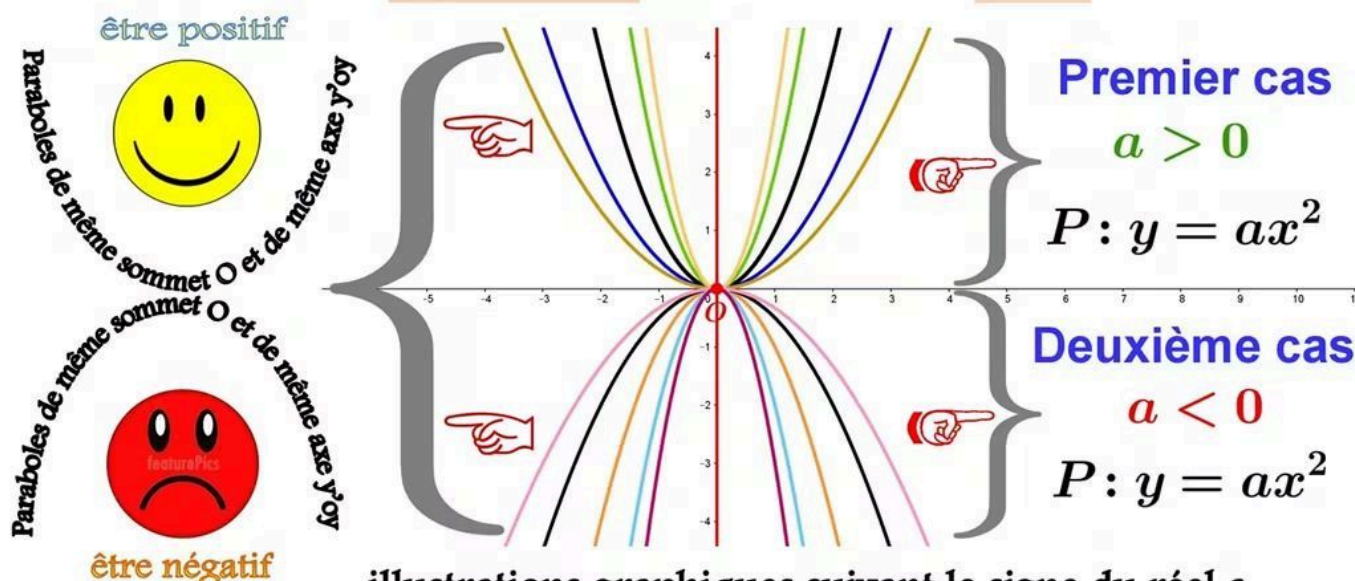
- La fonction f est paire : l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour La courbe de f

- Le réel 0 est un extremum de f : $f(x) = ax^2$:
 - si $a > 0$: 0 est minimum globale de f sur $\mathbb{R}$
 - si $a < 0$: 0 est maximum globale de f sur $\mathbb{R}$

- **Variations :** $f(x) = ax^2$:
 - si $a > 0$: f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$
 - si $a < 0$: f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$

- La courbe représentative de f est appelée parabole

- La droite $y = 0$ est appelée Axe du parabole P est le point O est appelé sommet du parabole



illustrations graphiques suivant le signe du réel a

3- Généralisation : Fonction de type : $x \mapsto ax^2 + bx + c$; $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$

RAPPEL

Forme canonique

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta : \alpha = -\frac{b}{2a} ; \beta = -\frac{\Delta}{4a} ; \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2$. On note C_g sa courbe dans un R.O.N $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit le vecteur $\vec{U} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$. On note $C_f = t_{\vec{U}}(C_g)$ la courbe représentative de la fonction f

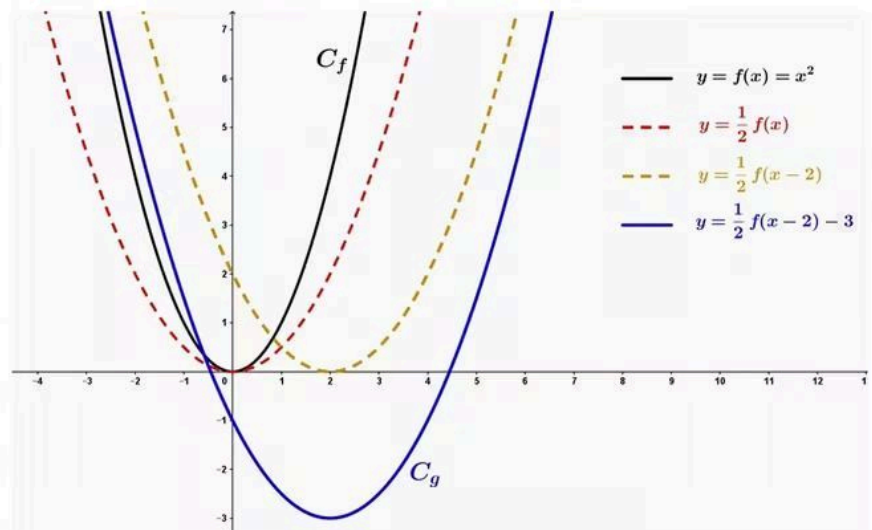
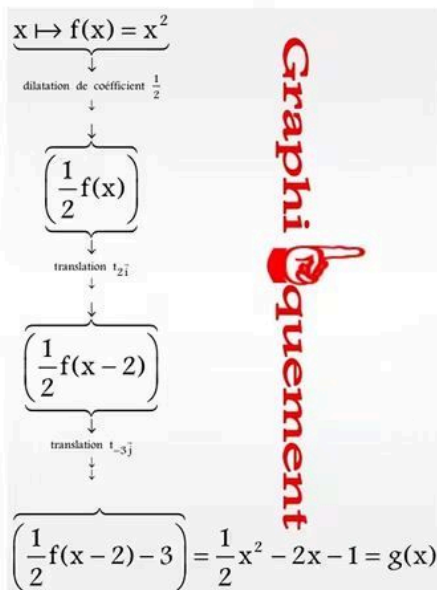
$$M(x; y) \in C_g : t_{\vec{U}}(M) = M'(x'; y') \in C_f \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{U} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \alpha \\ y' - y = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - \alpha \\ y = y' - \beta \end{cases}$$

$$\text{Or } M(x; y) \in C_g \Leftrightarrow y = g(x) = ax^2 ; \text{ ainsi } \begin{cases} x = x' - \alpha \\ y' = ax^2 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow y' = a(x' - \alpha)^2 + \beta \Leftrightarrow y' = ax'^2 + bx' + c$$

La courbe C_f est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$$x \mapsto g(x) = x^2 \xrightarrow[\text{dilatation ou contraction de coef } a]{\mapsto} (a \cdot g(x)) \xrightarrow[\text{translation } t_{\alpha \vec{i}}]{\mapsto} (a \cdot g(x - \alpha)) \xrightarrow[\text{translation } t_{\beta \vec{j}}]{\mapsto} (a \cdot g(x - \alpha) + \beta) = ax^2 + bx + c = f(x)$$

Application : Passage de $f : x \mapsto f(x) = x^2$ à $g : x \mapsto g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$



Procédé de construction de la fonction g à partir de f

Conséquences : f la Fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$

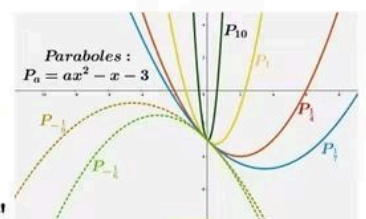
Variations :

$$f(x) = ax^2 + bx + c : \begin{cases} \bullet \text{ si } a > 0 : f \text{ est décroissante sur }]-\infty; -\frac{b}{2a}] \text{ et croissante sur } [-\frac{b}{2a}; +\infty[\\ \bullet \text{ si } a < 0 : f \text{ est croissante sur }]-\infty; -\frac{b}{2a}] \text{ et décroissante sur } [-\frac{b}{2a}; +\infty[\end{cases}$$

• La courbe représentative de f est appelée **parabole**

Remarque : La valeur absolue du nombre réel a donne également vitesse De variation de la fonction du second degré. Ainsi plus a est proche de zéro, plus la parabole va paraître « aplatie », pour un repère donné.

Autrement dit : plus a est proche de zéro la fonction croît ou décroît 'lentement'. plus a s'éloigne de zéro la fonction croît ou décroît 'rapidement'

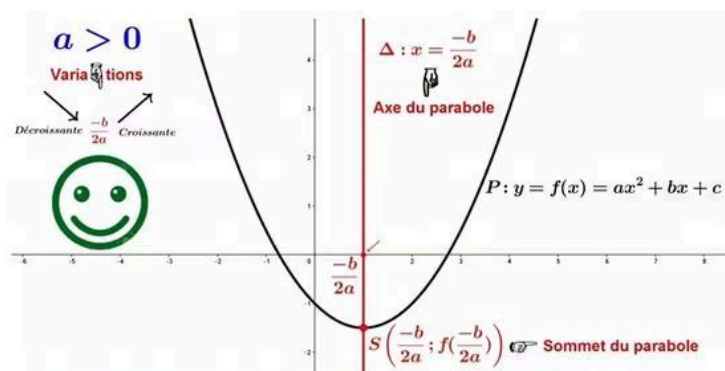


- La droite $\Delta : y = \alpha = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie du parabole P appelée **Axe du parabole P**
- Le point $S(\alpha; \beta) = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ est appelé **sommet du parabole** : $S(\alpha; \beta) \in \Delta$

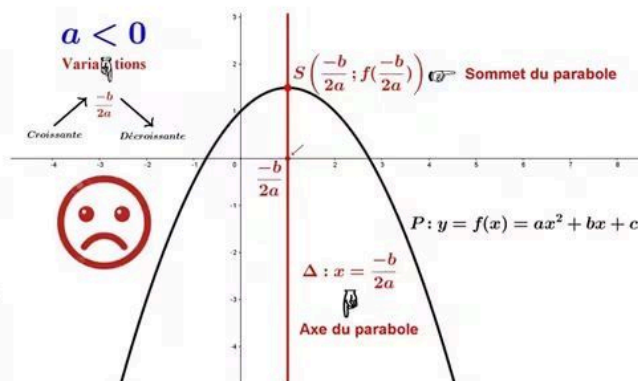
Maximum et Minimum

$$f(x) = ax^2 + bx + c : \begin{cases} \text{si } a < 0 : f \text{ admet un maximum } M \text{ sur } \mathbb{R} \text{ en } x = \alpha = -\frac{b}{2a} : M = f(\alpha) = \beta = -\frac{\Delta}{4a} \\ \text{si } a > 0 : f \text{ admet un minimum } m \text{ sur } \mathbb{R} \text{ en } x = \alpha = -\frac{b}{2a} : m = f(\alpha) = \beta = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

Courbes représentatives : deux cas



$a > 0$: La parabole est «tournée vers le haut»



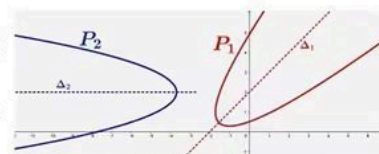
$a < 0$: La parabole est «tournée vers le bas»



Les deux courbes représentées ci contre sont deux paraboles

P_1 et P_2 d'axes respectives Δ_1 et Δ_2 mais chacun de ces deux paraboles ne

Représente aucune fonction et en particulier aucune fonction polynomiale de second degré



Ainsi : Une parabole tracée dans un repère O.N représente une fonction de second degré si et seulement si Son axe est parallèle à l'axe des ordonnées

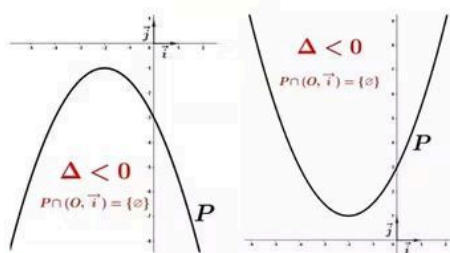
Intersection du parabole avec les axes du repère :

a-Intersection du parabole avec l'axe des ordonnées :

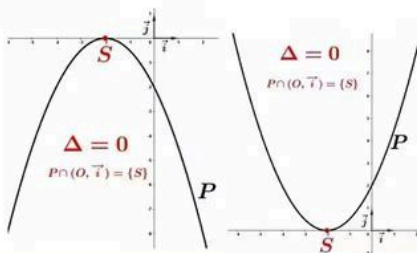
La parabole P d'équation : $y = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des ordonnées en un unique point de coordonnées $(0; c)$ **Ainsi :** $P \cap (O; \vec{j}) = \{(0; c)\}$

Fonction de référence : Parabole

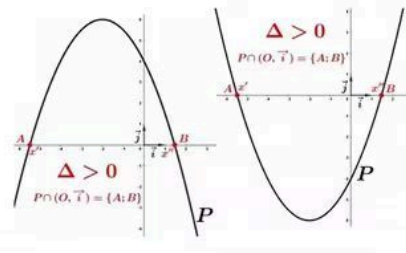
b-Intersection du parabole avec l'axe des abscisses : trois cas



Aucun point d'intersection
 $\Delta < 0$



Un seul point d'intersection
 $\Delta = 0$



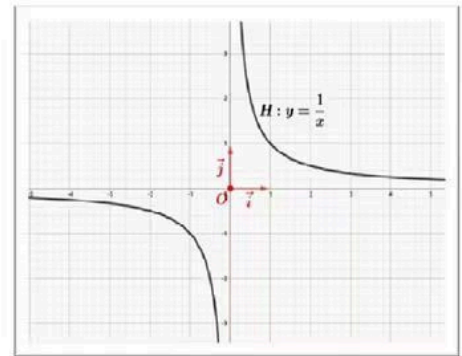
Deux points d'intersection
 $\Delta > 0$

Fonction homographique - Hyperbole

1~ Fonction inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \in \mathbb{R}^*$

On appelle fonction inverse la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

- La fonction f est **décroissante** sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
- La fonction f est **impaire** : l'origine du repère est un centre de symétrie pour la courbe représentative de f
- La courbe représentative de f est appelée **Hyperbole**
- Les droites : $x = 0$ et $y = 0$ sont appelées **Asymptotes**



à l'hyperbole H :



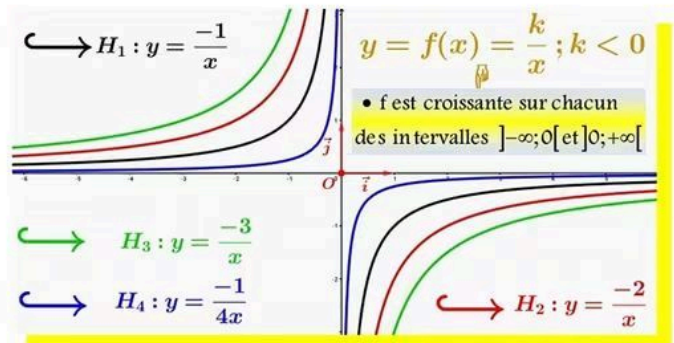
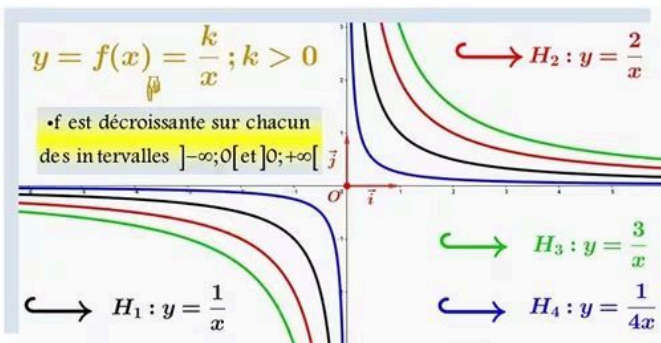
- ~ On peut rendre $f(x) = \frac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif : **Ainsi :** La droite $x = 0$ est une asymptote (verticale) à la courbe H
- ~ On peut rendre $f(x) = \frac{1}{x}$ aussi petit que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et négatif : **Ainsi :** La droite $x = 0$ est une asymptote (verticale) à la courbe H
- ~ On peut rendre $f(x) = \frac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand Ou petit : **Ainsi :** La droite $y = 0$ est une asymptote (horizontale) à la courbe H

2~ Fonction de type : $x \mapsto \frac{k}{x}$; $x \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$

- La fonction f est **impaire** : l'origine du repère est un centre de symétrie pour la courbe de f

Variations : $f(x) = \frac{k}{x}$: $\begin{cases} \bullet k > 0 : f \text{ est décroissante sur chacun des intervalles }]-\infty; 0[\text{ et }]0; +\infty[\\ \bullet k < 0 : f \text{ est croissante sur chacun des intervalles }]-\infty; 0[\text{ et }]0; +\infty[\end{cases}$

- La courbe représentative de f est appelée **Hyperbole**
- Les droites : $x = 0$ et $y = 0$ sont appelées **Asymptotes** à l'hyperbole H :



3- Fonction de type : $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$; $c \in \mathbb{R}^*$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$; $ad - bc \neq 0$: fonction homographique

a-Exemple: Soit f la Fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{-x+3}{x-2}$

$$f(x) = \frac{-x+2-2+3}{x-2} = \frac{-(x-2)+1}{x-2} = -\frac{(x-2)}{(x-2)} + \frac{1}{x-2} = -1 + \frac{1}{x-2}$$

Soit x et y deux réels de $] -\infty; 2[$ ou $] 2; +\infty[$ tel que : $x \leq y$

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{y-2} = \frac{y-2-x+2}{(x-2)(y-2)} = \frac{y-x \geq 0}{(x-2)(y-2) \geq 0} \geq 0 \quad \text{Ainsi : } \bullet f \text{ est décroissante sur chacun des intervalles }] -\infty; 2[\text{ et }] 2; +\infty[$$

Géométriquement :

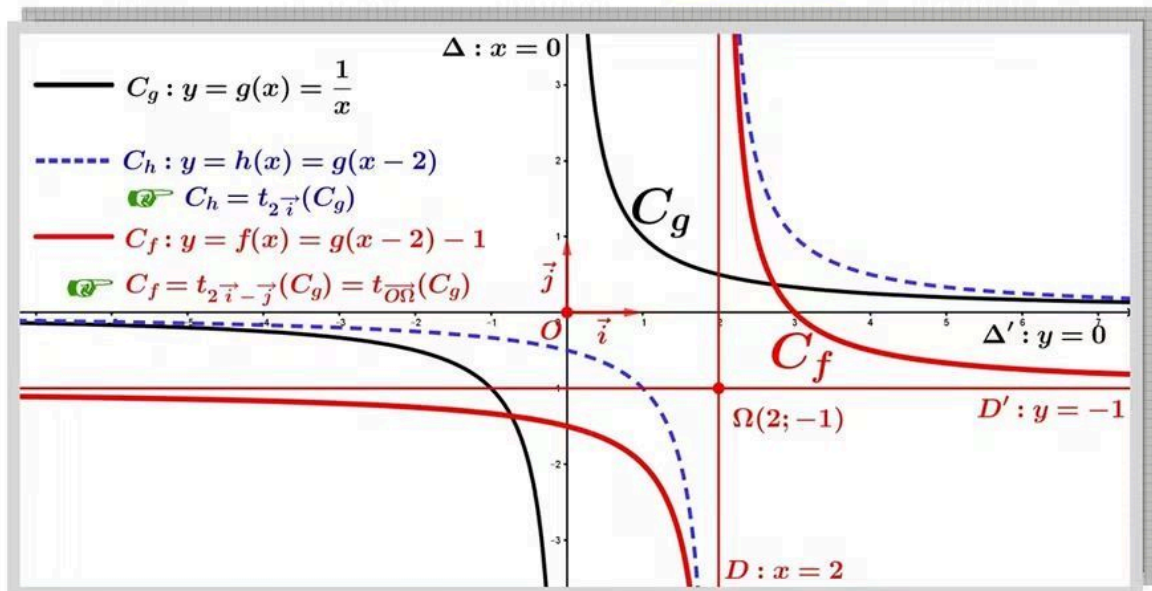
On pose $g(x) = \frac{1}{x}$; $x \in \mathbb{R}^*$; $\Omega(2; -1)$; $\vec{U} = \overrightarrow{O\Omega}$

On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g respectivement dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$\bullet M(x; y) \in C_g : t_{\vec{U}}(M) = M'(x'; y') \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{U} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 2 \\ y' - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$$

$$\text{Or } M(x; y) \in C_g \Leftrightarrow y = g(x) = \frac{1}{x} ; \text{ ainsi : } \begin{cases} x = x' - 2 \\ y' = \frac{1}{x} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{x' - 2} - 1 = \frac{-x' + 3}{x' - 2} = f(x') \Leftrightarrow M'(x'; y') \in C_f$$

$$\text{Ainsi : } t_{\vec{U}}(C_g) = C_f$$



Conséquences : $\bullet f$ est décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty; 2[$ et $] 2; +\infty[$

$\bullet$ La courbe représentative C_f de f est une hyperbole

$$\bullet t_{\vec{U}}(C_g) = C_f \Rightarrow \bullet t_{\vec{U}}(\Delta) = (D) : x = 2 \Rightarrow (D) : x = 2 \text{ asymptote verticale à la courbe } C_f$$

$$\bullet t_{\vec{U}}(\Delta') = (D') : y = -1 \Rightarrow (D') : y = -1 \text{ asymptote horizontale à la courbe } C_f$$

Conséquences : $\bullet t_{\vec{U}}(O) = \Omega \Rightarrow \Omega$ est centre de symétrie de C_f : centre de l'hyperbole

Généralisation : Fonction de type : $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$; $c \in \mathbb{R}^*$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$; $ad-bc \neq 0$: fonction homographique

Remarque : • si $d=0 \Leftrightarrow bc=0 \Leftrightarrow b=0 (c \in \mathbb{R}^*) \Leftrightarrow f(x) = \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$
 • Si $ad-bc=0$: $\Rightarrow f$ est la fonction constante

Remarque : • si $d \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{ax}{cx} = \frac{b}{d} = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow f(x) = \frac{ax}{cx} = \frac{b}{d}$

Dans toute la suite on suppose que $ad-bc \neq 0$

Forme réduite :
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} \times \frac{\left(x+\frac{d}{c}\right) + \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)}{\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} \times \left(1 + \frac{\frac{bc-ad}{ac}}{\left(x+\frac{d}{c}\right)}\right) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x - \left(-\frac{d}{c}\right)}$$

Ainsi : $f(x) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x - \left(-\frac{d}{c}\right)} = \beta + \frac{k}{x-\alpha}$: C'est la Forme réduite de $f(x)$; avec :

• $\alpha = -\frac{d}{c}$
 • $\beta = \frac{a}{c}$
 • $k = \frac{bc-ad}{c^2}$

Conséquences : Sens de variations de f - Asymptotes - centre de symétrie - courbe

Soit x et y deux réels de $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ ou $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$ tel que : $x \leq y$. On compare entre $f(x)$ et $f(y)$

• $f(x) - f(y) = \left(\beta + \frac{k}{x-\alpha}\right) - \left(\beta + \frac{k}{y-\alpha}\right) = \frac{k}{x-\alpha} - \frac{k}{y-\alpha} = \frac{k(y-\alpha) - k(x-\alpha)}{(x-\alpha)(y-\alpha)} = \frac{k(y-x)}{(x-\alpha)(y-\alpha)}$

Ainsi : Le signe de $f(x) - f(y)$ dépend du réel k (et par conséquent du réel $ad-bc$)

IMPORTANT

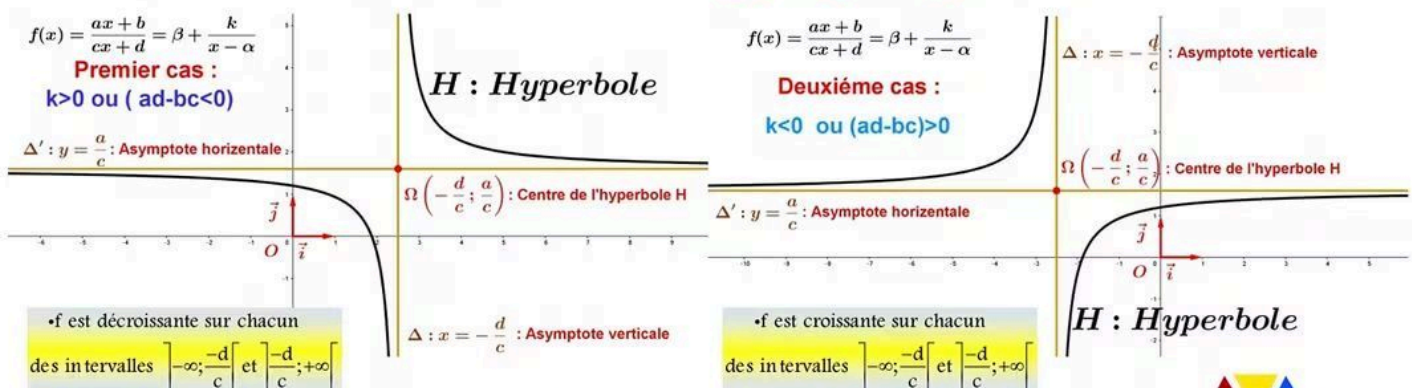
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \beta + \frac{k}{x-\alpha}$$



- $k > 0 (\Leftrightarrow ad-bc < 0)$: f est décroissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$
- $k < 0 (\Leftrightarrow ad-bc > 0)$: f est croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$
- La courbe représentative C_f de f est une hyperbole notée H
- Les deux droites $\Delta : x = -\frac{d}{c}$ et $\Delta' : y = \frac{a}{c}$ sont asymptotes à la courbe C_f
- Le point $\Omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right) = \Delta \cap \Delta'$ est un centre de symétrie pour C_f : Centre de H

IMPORTANT

Illustrations graphiques



Fonction homographique - Hyperbole -

Fonctions de références et changement de repère

Prof : bellassoued mohamed

Fonction Trinôme de second degré - Parabole -

RAPPEL

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta : \alpha = -\frac{b}{2a}; \beta = -\frac{\Delta}{4a};$$

avec $\Delta = b^2 - 4ac$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On note C_f sa courbe représentative dans un R.O.N $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$M(x; y) \in C_f \Leftrightarrow y = f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \Leftrightarrow y - \beta = a(x - \alpha)^2.$$

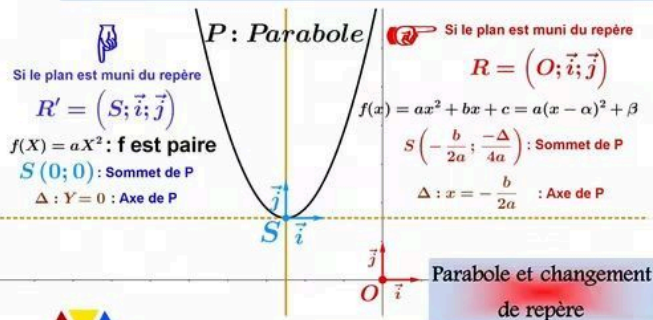
• On pose : $\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases} \Rightarrow Y = aX^2$; • $S(\alpha; \beta)_{R=(O; \vec{i}; \vec{j})}$; • $R' = (S; \vec{i}; \vec{j})$

Ainsi : $\overline{SM} = (x - \alpha)\vec{i} + (y - \beta)\vec{j} = X\vec{i} + Y\vec{j} \Leftrightarrow M(X; Y)_{R'=(S; \vec{i}; \vec{j})}$

Par changement de repère ; la courbe de f dans le nouveau



Repère $R' = (S; \vec{i}; \vec{j})$ est une parabole P d'équation : $Y = aX^2$



Fonction homographique - Hyperbole -

RAPPEL

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \beta + \frac{k}{x - \alpha} : \alpha = -\frac{d}{c}; \beta = \frac{a}{c};$$

avec $k = \frac{bc - ad}{c^2}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ par $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un R.O.N $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$M(x; y) \in C_f \Leftrightarrow y = f(x) = \beta + \frac{k}{x - \alpha} \Leftrightarrow y - \beta = \frac{k}{x - \alpha}.$$

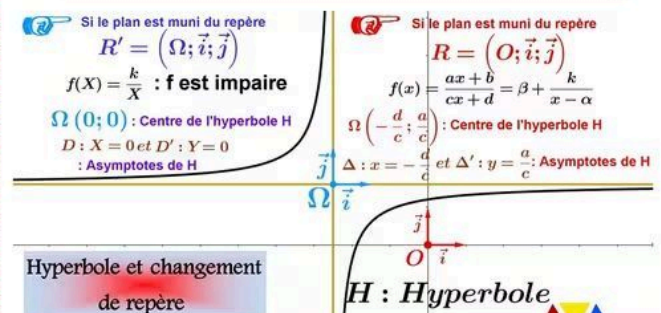
• On pose : $\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases} \Rightarrow Y = \frac{k}{X}$; • $\Omega(\alpha; \beta)_{R=(O; \vec{i}; \vec{j})}$; • $R' = (\Omega; \vec{i}; \vec{j})$

Ainsi : $\overline{\Omega M} = (x - \alpha)\vec{i} + (y - \beta)\vec{j} = X\vec{i} + Y\vec{j} \Leftrightarrow M(X; Y)_{R'=(\Omega; \vec{i}; \vec{j})}$

Par changement de repère ; la courbe de f dans le nouveau



Repère $R' = (\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ est une Hyperbole H d'équation : $Y = \frac{k}{X}$



Fonctions de références et changement de repère