

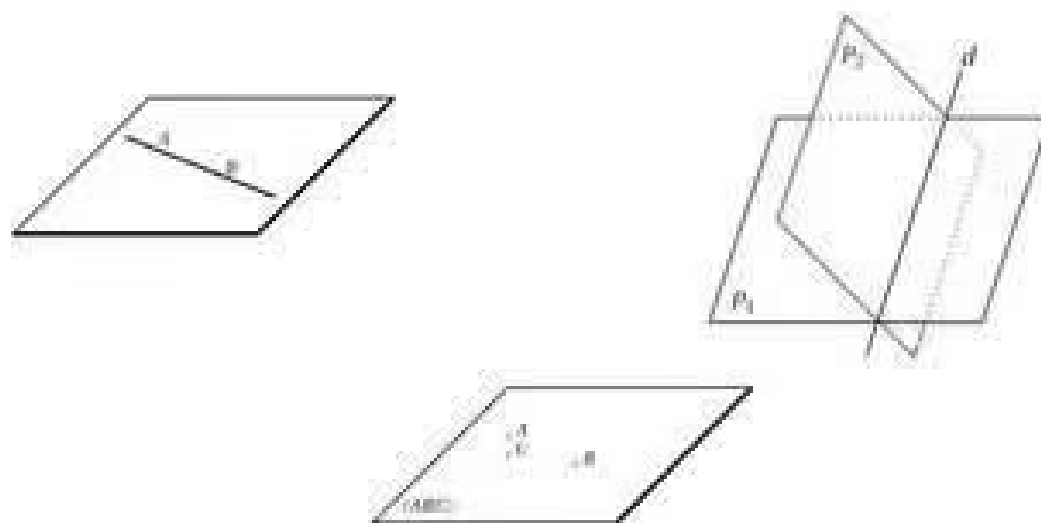
$(\mathcal{E})$ désigne l'espace.



Droites et plans de l'espace

- Si A et B sont deux points distincts de $(\mathcal{E})$, la droite (AB) désigne l'ensemble des points de $(\mathcal{E})$ alignés avec A et B .
Admettre : Etant donnés deux points distincts A et B , il existe une et une seule droite contenant A et B .
- Admettre : Si A , B et C sont trois points non alignés de $(\mathcal{E})$, il existe un et un seul plan contenant ces trois points. Ce plan sera noté (ABC) .
- Dans tout plan $(\mathcal{P})$ inclus dans l'espace $(\mathcal{E})$, les résultats de la géométrie plane s'appliquent.
- Si deux plans distincts ont un point commun alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point.

Figure



Détermination d'un plan

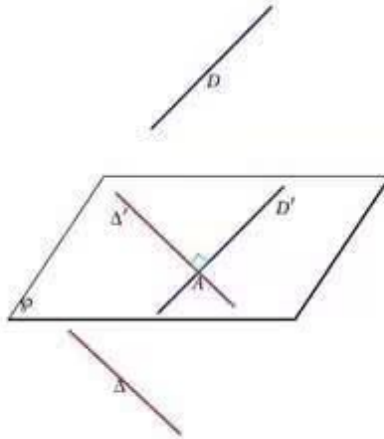
Un plan est parfaitement déterminé par l'une des données suivantes :

- Trois points non alignés.
- Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite.
- Deux droites sécantes.
- Deux droites parallèles et disjointes.

Coplanarité

- Des points coplanaires sont des points situés dans un même plan. Deux points ou trois points sont toujours coplanaires. En effet, deux points sont toujours sur une même droite qui peut être plongée dans un plan.

Figure



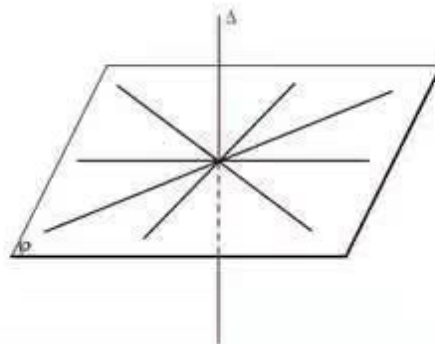
8

Droites et plans orthogonaux

Définitions et propriétés

- 1 On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- 2 Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
- 3 Si deux droites sont parallèles tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- 4 Si deux plans sont parallèles toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre. Par un point donné il passe une droite et une seule perpendiculaire à un plan. donné.
- 5 Par un point donné il passe un plan et un seul perpendiculaire à une droite donnée.
- 6 Si une droite D est orthogonale à un plan P alors toute droite orthogonale à la droite D et passant par un point du plan P est contenue dans ce plan.
- 7 Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.
- 8 Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

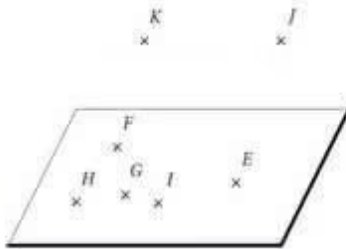
Figure



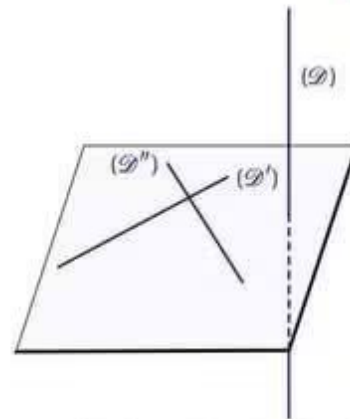
➡ Deux droites sont coplanaires s'il existe un plan qui les contiennent toutes les deux.

Dans l'espace, des droites non sécantes ne sont pas nécessairement parallèles. Pour montrer que deux droites ne sont pas coplanaires, il suffit de montrer qu'elles ne sont ni parallèles ni sécantes

Figure



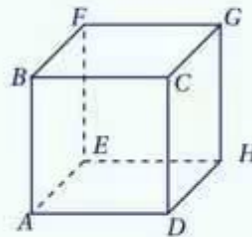
- Etudier la coplanarité des points situés dans la figure.



- Etudier la coplanarité des droites (D) , (D') et (D'')

Exercice

$ABCDEFGH$ est un cube.



- ➡ Citer deux droites coplanaires.
- ➡ Citer deux droites non coplanaires.

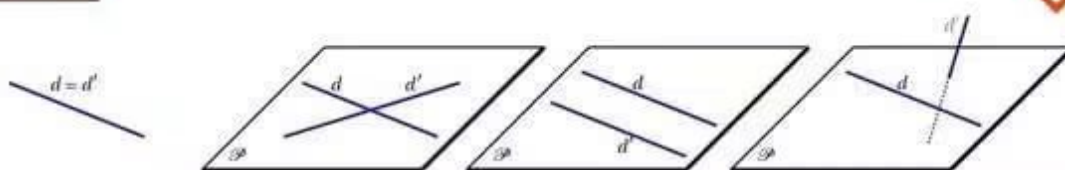
2

Position relative de deux droites du plan

Deux droites d_1 et d_2 peuvent être coplanaires ou non coplanaires.

Si elles sont coplanaires (contenues dans le même plan), elles peuvent être sécantes en un point, strictement parallèles ou confondues. Si elles ne sont pas coplanaires, aucun plan ne contient les deux droites.

Figure



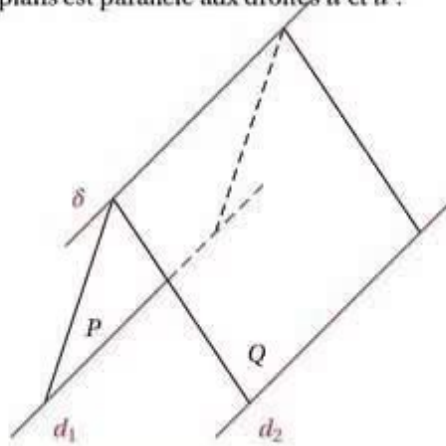
- (a) : $d = d'$ parallèles, coplanaires.
 (b) : d et d' sécantes $d, d' \subset$ un unique plan.
 (c) : d et d' parallèles strictes $d, d' \subset$ dans un unique plan.
 (d) : d et d' non coplanaires d et d' ni sécantes, ni parallèles

Figure

Si on a :

- Deux droites parallèles d et d' ;
- Un plan P contenant d ;
- Un plan Q contenant d' ;
- P et Q sécants selon une droite δ .

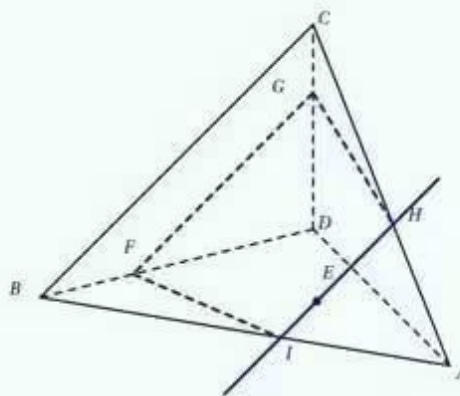
Alors, l'intersection δ des deux plans est parallèle aux droites d et d' .



Exercice corrigé

Soit $ABCD$ est une tétraèdre. Le segment $[FG]$ est parallèle à l'arête $[BC]$. E est un point du plan (ABC) . Construire l'intersection du plan (EFG) avec la tétraèdre.

× × × SOLUTION



(BC) est une droite du plan (ABC) et (FG) est une droite du plan (EFG) . Les droites (FG) et (BC) étant parallèles, on peut appliquer le **théorème de toit** pour déduire que les plans (ABC) et (EFG) se coupent suivant une droite d passant par E et parallèle à (FG) et (BC) . Cette droite coupe $[AC]$ en H et $[AB]$ en I . Il suffit enfin de tracer le quadrilatère $FGHI$: intersection du plan (EFG) avec la tétraèdre.

Exercice

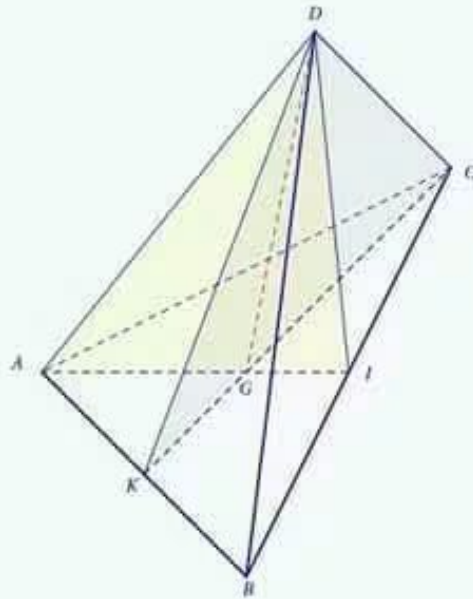
$ABCD$ est un tétraèdre. On considère les points $L \in [AD]$, $M \in [DB]$ et $N \in [DC]$ tels que les droites (AB) et (LM) sont sécantes en I ; les droites (AC) et (LN) sont sécantes en J ; les droites (BC) et (MN) sont sécantes en K .

- 1 Construire les points I , J et K .
- 2 Démontrer que les points I , J et K sont alignés.

Exercice corrigé

$ABCD$ est un tétraèdre. I est le milieu de $[BC]$ et K est le milieu de $[AB]$.

- 1 Construire le centre de gravité G du triangle ABC .
- 2 Démontrer que (DG) est la droite d'intersection des plans (DCK) et (DAI) .



- 1 Construire le centre de gravité G du triangle ABC :
On trace les médianes $[AI]$ et $[CK]$ du triangle ABC . G centre de gravité du triangle ABC est leur point d'intersection.
- 2 Démontrer que la droite (DG) est la droite d'intersection des plans (DCK) et (DAI) :
 $A \in (CDK)$ et $A \in (DAI)$ donc les plans (DCK) et (DAI) ne sont pas confondus.
 $D \in (CDK)$ et $D \in (DAI)$ donc les plans (DCK) et (DAI) ont au moins un point commun.
Par suite, les deux plans sont sécants et leur intersection est une droite (d)

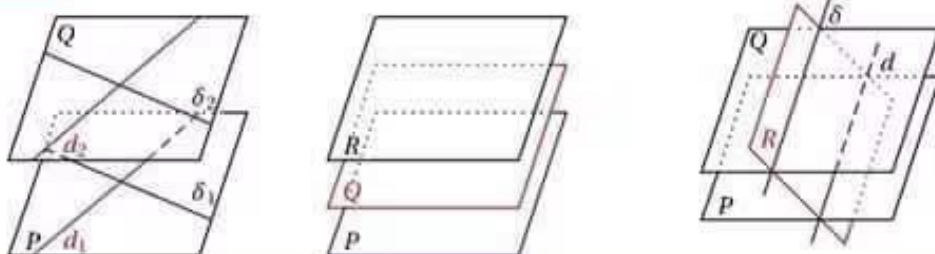
$D \in (CDK) \cap (DAI)$.
 $G \in (CK)$ donc $G \in (CDK)$.
 $G \in (AI)$ donc $G \in (DAI)$.
 Donc $G \in (CDK) \cap (DAI)$.
 Donc la droite (d) est la droite (DG)

5

Propriétés et remarques

- Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan
- Si une droite d est parallèle à un plan φ et une droite d' parallèle à φ , on ne peut pas en déduire que $d // d'$!
- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q alors les plans P et Q sont parallèles,
- Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles,
- Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Figure

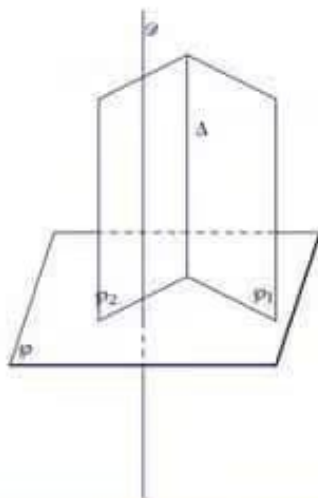


Figure

Propriété

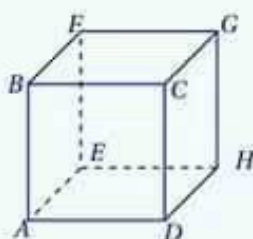
- Si $\mathcal{D}$ est une droite parallèle à deux plans φ_1 et φ_2 .
- Si φ_1 et φ_2 sont sécants.

Alors $\mathcal{D}$ est parallèle à leur droite commune Δ .



Exercice

$ABCDEFGH$ est un cube.



1 Dans chacun des cas, donner la position des droites :

a (AB) et (CG) .

c (AC) et (FH) .

e (BH) et (AE) .

b (AF) et (GH) .

d (CE) et (DF) .

2 On note I , M , N et P sont les milieux respectifs de $[CG]$, $[CD]$, $[EH]$ et $[BF]$.

3 Dans chacun des cas, étudier les positions relatives de :

i (BC) et (EH) .

ii (AG) et (BH) .

iii (AG) et (EI) .

iv (BH) et (EI) .

4 Dire si les droites sont coplanaires ou non ?

i (BC) et (EH) .

ii (AG) et (BH) .

iii (AG) et (EI) .

iv (BH) et (EI) .

3

Position relative de d'une droite et d'un plan

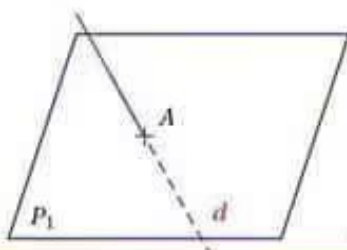
Une droite D et un plan P sont soit sécants, soit parallèles.

S'ils sont sécants, ils n'ont qu'un point commun.

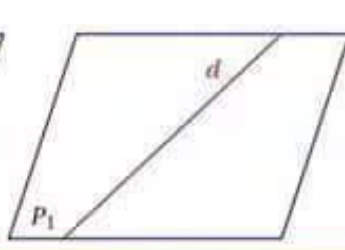
S'ils sont parallèles, D est incluse dans P ou ils n'ont aucun point commun.

Figure

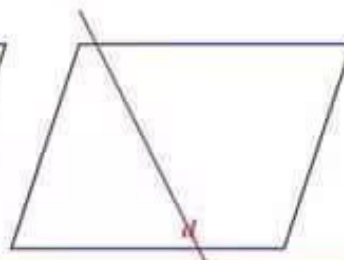
Droite et plan sécants :
un point d'intersection



Droite et plan parallèles :
droite incluse dans le plan



Droite et plan parallèles :
aucun point d'intersection



Exercice

1 Utiliser les données de l'exercice précédent, étudier la position relative des droites et des plan donnés :

a (AB) et (CDH) .

c (BG) et (CDE) .

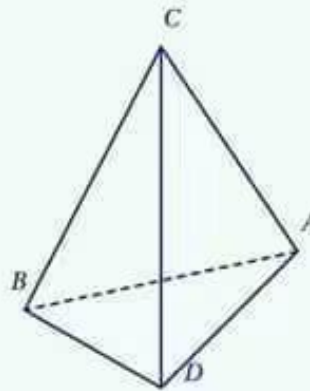
e (BC) et (FAD) .

b (AC) et (BDF) .

d (AG) et (CFH) .

f (AB) et (ACD) .

➤ Soit $ABCD$ un tétraèdre



Dans chacun des cas, étudier les positions des droites et plans.

➤ (CB) et (AD) .

➤ (DC) et (BAD) .

➤ (DBC) et (AD) .

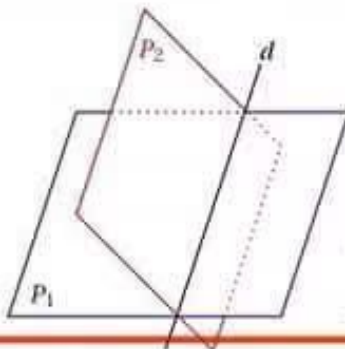
4

Position relative de deux plans

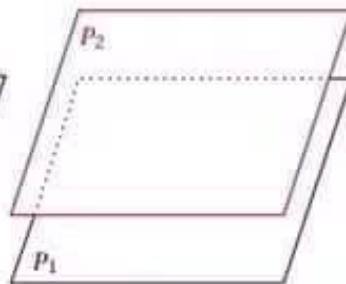
Deux plans P_1 et P_2 de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.
S'ils sont sécants, l'intersection est une droite.
S'ils sont parallèles, ils sont distincts ou confondus

Figure

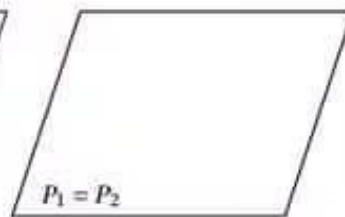
Plans sécants :
une droite d'intersection



Plans strictement parallèles :
aucun point d'intersection



Plans parallèles confondus :
un plan d'intersection



Exercice

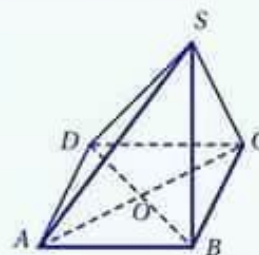
Soit $SABCD$ une pyramide à base carrée. O est le centre du carré $ABCD$.

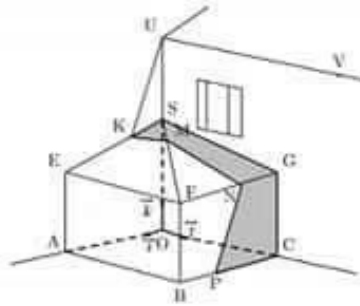
➤ Déterminer l'intersection de (SAB) et (SBC) .

➤ Déterminer l'intersection de (SAC) et (SBD) .

➤ Étudier la position de (SB) et (AC) .

➤ Déterminer l'intersection de (SAB) et (SCD) .





Situation d'environnement

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé

- Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.
- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes [UV] et [EF] des toits sont parallèles

Le point K appartient au segment [SE], le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale $KMNP$ qui est la limite ombre-soleil.

Justifier que

- 1 Le segment [KM] est parallèle au segment [UV]
- 2 Le segment [NP] est parallèle au segment [UK].

SOLUTION :

- 1 C'est le théorème du toit. En effet les arêtes [UV] et [EF] des toits sont parallèles, donc le théorème du toit nous dit que l'intersection des plans (ESF) et (UKV) sont parallèles aux droites (UV) et (EF). En particulier le segment [KM] est parallèle au segment [UV]
- 2 Les plans (SOA) et (GCB) étant parallèles les intersections de ces plans avec le plan (UKV) sont parallèles, donc le segment [NP] est parallèle au segment [UK].

7

Deux droites orthogonales

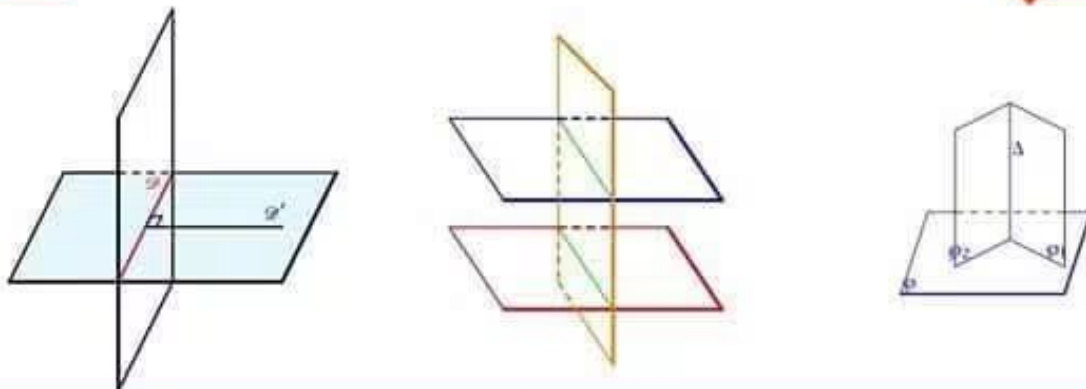
Définitions et propriétés

- 1 On dit que deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles menées par un même point sont deux droites perpendiculaires.
- 2 Si deux droites de l'espace sont orthogonales alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
- 3 Si deux droites de l'espace sont parallèles toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
- 4 Si D et Δ sont deux droites orthogonales et si D' et Δ' sont deux droites parallèles respectivement à D et Δ , alors D' et Δ' sont orthogonales.

alors toute droite $\mathcal{D}'$ contenue dans l'un de ces deux plans et perpendiculaire à la droite d'intersection $\mathcal{D}$ est orthogonale à l'autre.

- Si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
- Si deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires à un même plan $\mathcal{R}$ alors leur droite d'intersection $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{R}$.

Figure



10

Plan médiateur d'un segment- Axe d'un cercle

Définition et propriétés

- On appelle plan médiateur d'un segment le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu (Définition).
- L'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est le plan médiateur de ce segment (Propriété caractéristique). *On montre trois points non alignés équidistants à deux points.*
- On appelle axe d'un cercle la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan (Définition).
- L'ensemble des points équidistants de tous les points d'un cercle est l'axe de ce cercle (Propriété caractéristique) *On montre deux points équidistants à trois points.*

Exercice 1

On donne dans un plan $\mathcal{P}$ un cercle C de centre O et de rayon r , $[AB]$ un diamètre de C . On désigne par $\mathcal{Q}$ le plan médiateur du segment $[AB]$ et $\mathcal{Q}'$ le plan perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et contenant (AB) .

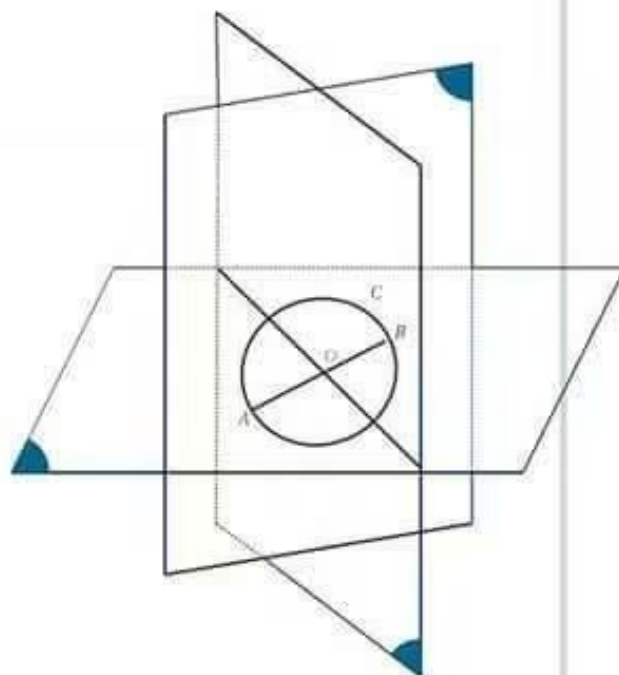
1. Montrer que $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$ sont perpendiculaires.

2. Soit Δ la droite d'intersection de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$. Montrer que Δ est l'axe du cercle C .

3. Soient D la tangente à C en B située dans le plan $\mathcal{P}$, M un point de Δ et N un point de D .

4. Montrer que le triangle MBN est rectangle en B .

5. On donne $OM = 2r$ et $BN = r$.
Calculer en fonction de r les distances BM et MN .



Exercice 2

On considère un tétraèdre $SABC$. Soit E le point de $[BC]$ et F le point de $[SC]$ tel que : $BE = \frac{3}{2}BC$ et $SF = \frac{3}{2}SC$.

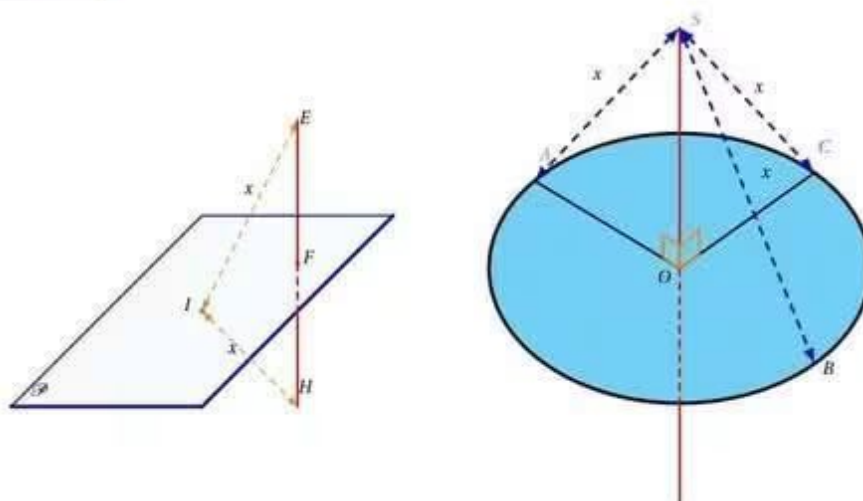
1. Construire les points E et F .

2. Montrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (BS) .

3. Montrer que les plans (AEF) et (ABC) sont sécants suivant la droite (AE) .

4. Soit $\mathcal{Q}$ la droite parallèle à (EF) passant par A , montrer que les plans (AEF) et (ABS) sont sécants suivant la droite $\mathcal{Q}$.

5. On note I , J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AE]$ et $[AF]$. Montrer que les plans (IJK) et (CBS) sont parallèles.

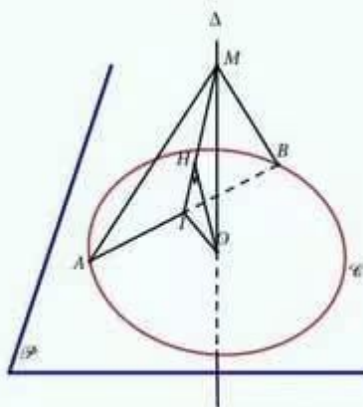


Exercices corrigés

EXERCICE 1

- 1 On considère dans un plan $\mathcal{P}$ un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et $[AB]$ une corde de $\mathcal{C}$. Soit I le milieu de $[AB]$ et un point M distinct de O situé sur l'axe du cercle $\mathcal{C}$.
- 2 Quel est le plan médiateur du segment $[AB]$?
 - 3 Montrer que les plans (OIM) et (ABM) sont perpendiculaires.
 - 4 Montrer que la hauteur $[OH]$ du triangle OIM est perpendiculaire au plan (ABM) .

SOLUTION



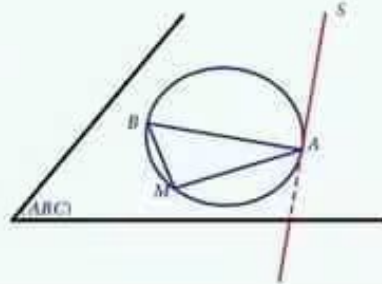
- 1 On a : $OA = OB$ (rayon de $\mathcal{C}$), $MA = MB$ (M appartient à l'axe de $\mathcal{C}$) et $IA = IB$ (I est le milieu de $[AB]$).
Donc les points O , M et I sont équidistants de A et de B et puisqu'ils ne sont pas alignés alors le plan (OIM) est le plan médiateur de $[AB]$.
- 2 La droite (AB) est contenue dans le plan (ABM) est perpendiculaire au plan (OIM) donc les deux plans (OIM) et (ABM) sont perpendiculaires.
- 3 La droite (AB) est perpendiculaire au plan (OIM) donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier à la droite (OH) .
La droite (OH) est orthogonale aux deux droites sécantes (AB) et (IM) du plan (ABM) donc elle est perpendiculaire à ce plan.

Exercices corrigés

- 1 Soit un triangle ABC et Δ une droite orthogonale à (AB) et à (AC) . Montrer que Δ est orthogonale à (BC) .
- 2 On considère Dans un plan $\mathcal{P}$ un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et un point M de $\mathcal{C}$. Sur la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ en A on prend un point S . Montrer que les droites (SM) et (MB) sont perpendiculaires.

SOLUTION

- 1 La droite Δ est orthogonale à deux droites sécantes (AB) et (AC) du plan (ABC) alors elle est orthogonale au plan (ABC) , donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan en particulier $(BC) \subset (ABC)$ alors $\Delta \perp (BC)$.
- 2 La droite (SA) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan et comme (BM) est incluse dans ce plan donc $(SA) \perp (BM)$.
D'une autre part le triangle AMB est rectangle en M puisque $M \in \mathcal{C}_{[AB]}$ donc $(BM) \perp (AM)$. Ce qui donne que la droite (MB) est orthogonale à deux droites sécantes (SA) et (AM) donc elle est perpendiculaire au plan (AMS) et par la suite elle est orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier à la droite (SM) .



Exercices

- 1 Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier et M le milieu du segment $[CD]$.
 - a Montrer que (CD) est perpendiculaire au plan (ABM) .
 - b Soit H la hauteur issue de A du triangle ABM . Montrer que $(AH) \perp (BCD)$.
- 2 Soit Δ une droite perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$. On note A le point commun à Δ et à $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan $\mathcal{P}$ ne passant pas par A . On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$. Soit M un point de Δ Distinct de A .
 - a Montrer que la droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan (AHM) .
 - b En déduire que les droites (MH) et $\mathcal{D}$ sont orthogonales.

9

Plans perpendiculaires

Definition et propriétés

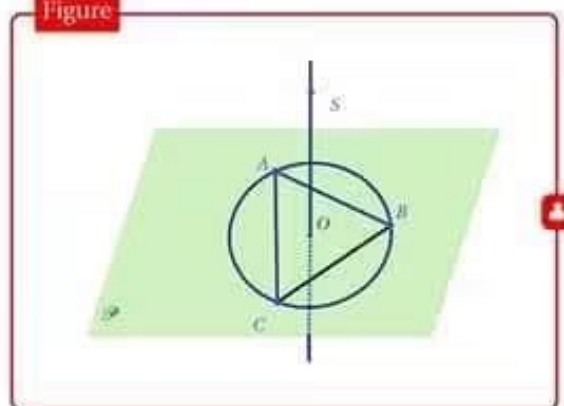
- 1 On dit que deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.
- 2 Si $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection de deux plans perpendiculaires,

Exercice 4

Dans la figure ci-dessous, on donne un triangle ABC équilatéral contenu dans un plan $(\mathcal{P})$ tel que $AB = 4$, S un point de l'axe Δ du cercle circonscrit au triangle ABC de centre O tel que $SO = 4$ et I le milieu de $[BC]$.

1. Montrer que la droite (SO) est orthogonale à (BC) .
2. Déterminer le plan médiateur du segment $[BC]$.
3. Montrer que le plan (SOI) est perpendiculaire au plan (SBC) .
4. Soit Δ' la perpendiculaire en A au plan $(\mathcal{P})$, S' un point de Δ' tel que $S'A = 4$.
 - a. Montrer que $S'B = S'C = 4\sqrt{2}$.
 - b. Montrer que la droite Δ' est contenue dans le plan (SOI) .
 - c. Montrer que le triangle $S'BI$ est rectangle en I .
 - d. Calculer AI et BI puis déduire $S'I$.
5. Montrer que (SS') est parallèle au plan $(\mathcal{P})$.
6. Soit $(\mathcal{T})$ la tangente à $(\mathcal{C})$ en B , M un point de $(\mathcal{T})$ et N le symétrique de M par rapport à B . Montrer que (SOB) est le plan médiateur du segment $[MN]$.
7. Montrer que (MN) est parallèle à (AC) .
8. Déterminer l'intersection des plans (SMN) et (SAC) .

Figure

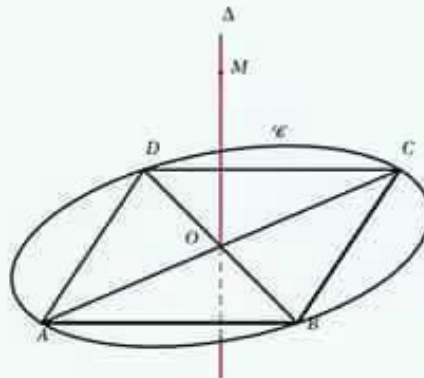


EXERCICE 2

Soit $ABCD$ un carré de côté a et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit de centre O . Δ la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ABC) . Soit M un point de Δ tel que $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

1. Montrer que Δ est l'axe du cercle $\mathcal{C}$.
2. Déterminer le plan médiateur du segment $[AB]$.
3. Montrer que les triangles MOA et MOC sont isométriques.
4. Montrer que les triangles (MOA) et (MOB) sont perpendiculaires.
5. Calculer en fonction de a la distance MD .

SOLUTION



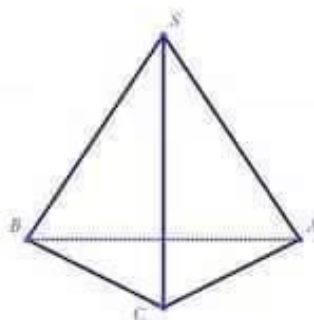
1. Δ est la droite passant par O et $\Delta \perp (ABC)$, alors Δ est l'axe du cercle circonscrit au cercle $\mathcal{C}$.
2. $M \in \Delta$, alors : $MA = MC$, et on a $BA = BC$ et $DA = DC$ et comme les points M, B et C ne sont pas alignés, donc le plan (MBC) est le plan médiateur du segment $[AC]$.
3. $OA = OC$ (O le milieu de $[AC]$),
 $MA = MC$ ($M \in \Delta$ l'axe de $\mathcal{C}$ et $A, C \in \mathcal{C}$).
 Et les triangles MOA et MOC ont le côté $[OM]$ commun donc ils sont isométriques.
4. On a $(OM) \perp (ABC)$ et $(OB) \subset (ABC)$ donc $(OM) \perp (OB)$ et comme $(OB) \perp (OA)$ ce qui donne $(OB) \perp (OAM)$, or $(OB) \subset (MOB)$ donc $(AOM) \perp (MOB)$.
5. Dans le plan (MBD) , le triangle ODM est rectangle en O , par l'application du théorème de Pythagore, on obtient :

$$MD^2 = MO^2 + DO^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2, \text{ d'où } MD = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

11

EXERCICES

Figure



Exercice 3

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en B situé dans un plan $\mathcal{P}$ et S un point de la droite Δ perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ en A et $S \neq A$.

- 1 Soit I le milieu de $[AC]$ et M le milieu de $[SC]$.
 - a Montrer que la droite (IM) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC .
 - b Déterminer le plan médiateur du segment $[AC]$.
 - c Montrer que les droites (BC) et (AS) sont orthogonales.
 - d Montrer que les plans (SBC) et (SAB) sont perpendiculaires.
- 2 Sachant que $SB = 2a$ et $AB = a$, a un réel positif. Calculer SA , IM et MB .
- 3 On donne J le projeté orthogonal de A sur (SB) . Montrer que AJC est un triangle rectangle et calculer son aire.

Figure

