



homothétie : fiche resumée

Soit I un point du plan et k un réel non nul

□ L'application, qui à tout un point M du plan associe le point M' tel que, $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ s'appelle

homothétie de centre I et de rapport k . On la note $h_{(I,k)}$. Ainsi $(h_{(I,k)}(M) = M') \Leftrightarrow (\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM})$

□ M' est l'image de M par $h_{(I,k)}$. M est l'antécédent de M' par $h_{(I,k)}$

Si $k = 1$: $h_{(I,1)}(M) = M$

h : identité du plan

Si $k = -1$: $h_{(I,-1)}(M) = S_I(M)$

h : symétrie centrale de centre I

$k \in \mathbb{R}$ $h_{(I,k)}(I) = I$

I un point invariant par h

Le centre d'une homothétie h ; un point et son image par h sont alignés.

$(h(M) = M'; h(N) = N') \Rightarrow (\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN})$

$(h(\Delta) = \Delta') \Rightarrow (\Delta \parallel \Delta')$

$(I \in \Delta) \Leftrightarrow (h(\Delta) = \Delta)$

une homothétie conserve l'alignement

$(A; B \text{ et } C \text{ alignés}) \Leftrightarrow (h(A); h(B) \text{ et } h(C) \text{ alignés})$

une homothétie conserve les milieux

$(O = A * B) \Leftrightarrow (h(O) = h(A) * h(B))$

une homothétie conserve le barycentre

$(G \text{ est B.P.P}(A; \alpha) \text{ et } (B; \beta)) \Leftrightarrow (h(G) \text{ est B.P.P}(h(A); \alpha) \text{ et } (h(B); \beta))$

une homothétie conserve le parallélisme

$(\Delta \parallel \Delta') \Leftrightarrow (h(\Delta) \parallel h(\Delta'))$

une homothétie conserve l'orthogonalité

$(\Delta \perp \Delta') \Leftrightarrow (h(\Delta) \perp h(\Delta'))$

une homothétie conserve le contact

$\left(\begin{array}{c} \Delta \\ \text{droite} \end{array} \cap \begin{array}{c} (\zeta) \\ \text{cercle} \end{array} = \{A\} \right) \Leftrightarrow (h(\Delta) \cap h((\zeta)) = \{h(A)\})$

une homothétie conserve les angles

$(A' = h(A); B' = h(B); C' = h(C)) \Rightarrow (\hat{ABC} = \hat{A'B'C'})$

une homothétie multiplie les longueurs par : $|k|$

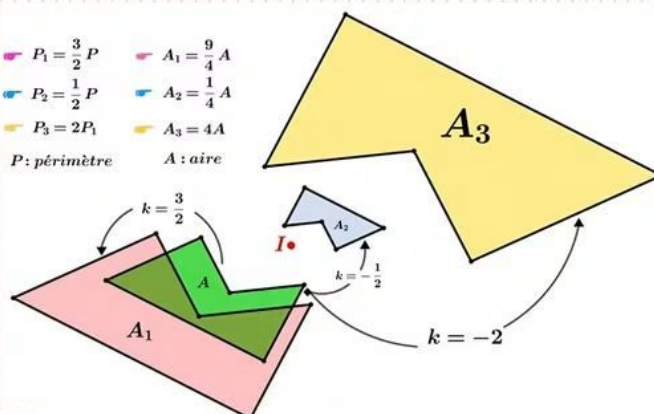
une homothétie multiplie les aires par : k^2

une homothétie multiplie les volumes par : k^3

Si $-1 < k < 1$: réduction

Si $k > 1$ ou $k < -1$: agrandissement

deux figures sont dites homothétiques, si l'une est l'image de l'autre par une homothétie.





EXERCICE

ABCD est un parallélogramme et G le barycentre des points pondérés (A ; 3) et (B ; 1)

PARTIE A

Soit f l'application du plan dans lui-même qui a tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

1-Déterminer l'image de A par f

2-a-Montrer que f admet un unique point invariant que l'on précisera

b-Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport

PARTIE B

Soit h l'homothétie de centre G et de rapport -3

1-Déterminer l'image de la droite (AD) par h. Justifier votre réponse

2-La droite (GD) coupe la droite (BC) en E. Montrer que h(D)=E

3-Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre G passant par A

a-Déterminer et construire le cercle $\mathcal{C}'$ image du cercle $\mathcal{C}$ par h

b-La demi droite [GD) coupe $\mathcal{C}$ en M et La demi droite [GE) coupe $\mathcal{C}'$ en N

Montrer que les droites (AM) et (BN) sont parallèles

4-Soit h' l'homothétie telle que h'(A) = N et h'(M) = B cercle de centre G passant par A

a-Construire le point G' image de G par h'

b-Construire le centre J de h'

c-Déterminer le rapport de h'

PARTIE A

Correction

1-Déterminer l'image de A par f

$$\overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A' = B; \text{ ainsi } \boxed{f(A) = B}$$

2-a - Montrer que f admet un unique point invariant que l'on précisera

$$f(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{MM} - 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} = \vec{0} ; \text{ ainsi : } \boxed{M = G}$$

b-Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \underbrace{3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}}_{=4\overrightarrow{MG}: \text{Gest B.P.P(A;3) et (B;1)}} = 4\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{MG} = -3\overrightarrow{GM}; \text{ ainsi : } \boxed{f = h_{(G; -3)}}$$

PARTIE B

1-Déterminer l'image de la droite (AD) par h. Justifier votre réponse

On a h(A) = B, donc h((AD)) est la droite passant par B et parallèle à (AD); Or ABCD est un parallélogramme, donc (AD) // (BC) et par suite $\boxed{h((AD)) = (BC)}$

2-La droite (GD) coupe la droite (BC) en E. Montrer que h(D)=E

On appliquant le théorème du Thalès dans le triangle GAD tels que : B ∈ (AG); E ∈ (DG) et (AD) // (AD)

$$\frac{GE}{GD} = \frac{GB}{GA} = 3 \Leftrightarrow GE = 3GD; \text{ or } \overrightarrow{GE} \text{ et } \overrightarrow{GD} \text{ sont colinéaires de sens opposés, donc } \overrightarrow{GE} = -3\overrightarrow{GD}; \text{ ainsi :}$$

$$\boxed{h(D) = E}$$

3- Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre G passant par A

a-Déterminer et construire le cercle $\mathcal{C}'$ image du cercle $\mathcal{C}$ par h

G est le centre de l'homothétie h donc $h(G)=G$, $A \in \mathcal{C}$ et $h(A)=B$ Donc $h(\mathcal{C})$ est :

le cercle $\mathcal{C}'$ de centre $h(G)=G$ et passant par $h(A)=B$ voir figure 1

b-La demi droite $[GD)$ coupe $\mathcal{C}$ en M et La demi droite $[GE)$ coupe $\mathcal{C}'$ en N

Montrer que les droites (AM) et (BN) sont parallèles

GM et GN sont respectivement deux rayons de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}' = h(\mathcal{C})$; donc $GN=3GM$

Or $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{GN}$ sont colinéaires de sens opposés , donc $\overrightarrow{GN} = -3\overrightarrow{GM}$; ainsi : $h(M) = N$

$(h(A) = B; h(M) = N) \Rightarrow (h((AM)) = (BN))$; ainsi $(AM) \parallel (BN)$

3- Soit h' l'homothétie telle que $h'(A) = N$ et $h'(M) = B$ cercle de centre G passant par A

a-Construire le point G' image de G par h'

• $(h'(A) = N \text{ et } h'(G) = G') \Rightarrow (h'((AG)) = (NG'))$; ainsi $(AG) \parallel (NG')$ ①

• $(h'(M) = B \text{ et } h'(G) = G') \Rightarrow (h'((MG)) = (BG'))$; ainsi $(MG) \parallel (BG')$ ②

Si Δ est la droite passant par N et parallèle à (AG) et Δ' la droite passant par B et parallèle à (MG)

Alors d'après ① et ② on déduit que $\{G'\} = \Delta \cap \Delta'$ voir figure 1

b-Construire le centre J de h'

• $(h'(A) = N \text{ et } h'(M) = B) \Rightarrow (J \in (AN) \text{ et } J \in (BM))$; ainsi $\{J\} = (AN) \cap (BM)$ voir figure 1

c-Déterminer le rapport de h'

Soit k le rapport de h' : $(h'(A) = N \text{ et } h'(M) = B) \Rightarrow (\overrightarrow{IN} = k\overrightarrow{JA} \text{ et } \overrightarrow{JB} = k\overrightarrow{JM})$; ainsi $\left(\frac{JN}{JA} = \frac{JB}{JM} = |k|\right)$

On appliquant le théorème du Thalès dans le triangle JNB tels que : $A \in (JN)$; $M \in (JB)$ et $(AM) \parallel (BN)$

$$\frac{JN}{JA} = \frac{JB}{JM} = \frac{BN}{AM}; \text{ Or : } h(A) = B \text{ et } h(M) = N; \text{ donc : } BN = 3AM; \text{ et par suite } \frac{JN}{JA} = \frac{BN}{AM} = 3$$

$\overrightarrow{JN}$ et $\overrightarrow{JA}$ sont colinéaires de même sens , donc :

$\overrightarrow{JN} = 3\overrightarrow{JA}$ Ainsi le rapport k de h' est : $k=3$

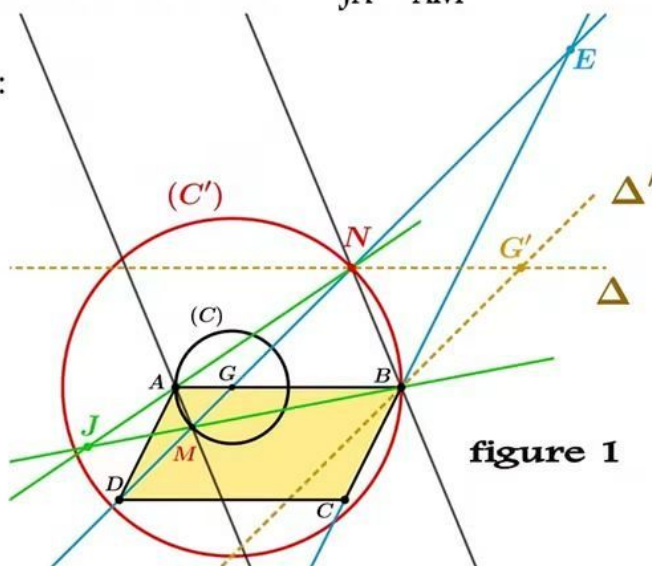


figure 1