

Chapitre 3

Notions de polynômes

I – Notion de fonctions

Définition

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Lorsque à tout réel x de E , on associe au plus un réel y , on dit qu'on a défini une fonction de E vers $\mathbb{R}$.

Si on désigne par f cette fonction, on note $y = f(x)$ et note $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

L'ensemble D des réels x de E tel que $f(x)$ existe est appelé l'ensemble de définition de la fonction f .

On dira alors que f est définie sur D

Vocabulaire :

Soit D l'ensemble de définition de f , x un réel appartenant à D et $y = f(x)$ on dit que

* Le réel y est l'image de x par la fonction f .

* x est un antécédent du réel y par f

Exemples :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 3x - 9$$

f est définie pour tout $\mathbb{R}$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$z \mapsto \sqrt{z - 2}$$

on doit avoir $z - 2 \geq 0$ soit $z \geq 2$ donc g est définie pour $x \in [2, +\infty[$

c) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{6x-1}{2x+3}$$

on doit avoir $2x + 3 \neq 0$ donc $x \neq -\frac{3}{2}$ donc k est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$

II – Fonction polynôme

Définition

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ et a_n des réels

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ est appelée fonction polynôme.

Les réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ et a_n sont appelés les coefficients de la fonction polynôme.

Remarque : par abus de langage on dit le polynôme f au lieu de fonction polynôme

Si $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$ alors f est un polynôme nul

Exemples :

a) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un polynôme ; b) $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas un polynôme
 $x \mapsto -2x^3 - 5x^2 - 1$ $x \mapsto |x|$

c) $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un polynôme

$$x \mapsto -2(x+1)^3 + 5x^2 - 4x$$

$$\begin{aligned} \text{car } H(x) &= -2(x+1)^3 + 5x^2 - 4x = -2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 5x^2 - 4x \\ &= -2x^3 - x^2 - 10x - 2 \end{aligned}$$

III – Egalité de deux fonctions polynôme

1 – Degré d'un polynôme

Définition

On admet que tout polynôme non nul P a une écriture unique de la forme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ avec } a_n \neq 0$$

L'entier n est appelé le degré du polynôme P , On écrit $d^\circ(P)=n$

On convient que le polynôme nul n'a pas de degré

Le degré d'un polynôme constant est égal à zéro

Vocabulaire :

* a_0 s'appelle terme constant

* $a_1 x$ s'appelle le terme du premier degré ou le terme en x

* $a_n x^n$ s'appelle le terme de degré n ou le terme en x^n (ou terme du plus haut degré)

* chacun des termes $a_0, a_1 x, \dots, a_{n-1} x^{n-1}$ et $a_n x^n$ est appelé monôme

* Tout polynôme du premier degré ($f(x) = a_1 x + a_0$) est appelé binôme du premier degré

* Tout polynôme du second degré ($f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$) est appelé trinôme du second degré

2 – Egalité de fonctions polynômes

Définition

On considère les deux fonctions polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ définies par

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \text{ et } Q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$$

On a $P(x) = Q(x)$ si et seulement si on a $d^\circ(P)=d^\circ(Q)$ et $a_n = b_n, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$

IV – Opérations sur les fonctions polynômes

Définition

Soit f et g deux polynômes et α réel.

* On appelle somme de f et g le polynôme noté $f+g$ et définie pour tout réel x par
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

* On appelle produit du polynôme f par le réel α le polynôme noté αf et défini pour tout réel x par
 $\alpha f(x) = \alpha f(x)$

* On appelle produit des polynômes f et g le polynôme fg et définie pour tout réel x par
 $fg(x) = f(x) \cdot g(x)$

Exemples :

- $P(x) = 3x^4 - 7x^2 + x$ est de degré 4
- $Q(x) = (2x + 1)(2x^3 + 8x - 1) = 4x^4 + 8x^2 - 2x + 2x^3 + 8x - 1 = 4x^4 + 2x^3 + 6x - 1$
donc $d^o(V) = 4$
- $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = 3x^4 - 7x^2 + x + 4x^4 + 2x^3 + 6x - 1 = 7x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 7x - 1$
- $(3P - 2Q)(x) = 3P(x) - 2Q(x) = 3(3x^4 - 7x^2 + x) - 2(4x^4 + 2x^3 + 6x - 1) = 9x^4 - 21x^2 + 3x - 8x^4 - 4x^3 - 12x + 2 = x^4 - 4x^3 - 21x^2 - 9x + 2$
- $(PQ)(x) = P(x) \cdot Q(x) = (3x^4 - 7x^2 + x) \cdot (4x^4 + 2x^3 + 6x - 1) = 3x^4 \cdot 4x^4 + 3x^4 \cdot 2x^3 + 3x^4 \cdot 6x - 3x^4 \cdot 1 - 7x^2 \cdot 4x^4 - 7x^2 \cdot 2x^3 - 7x^2 \cdot 6x - 7x^2 \cdot 1 + x \cdot 4x^4 + x \cdot 2x^3 + x \cdot 6x - x \cdot 1 = 12x^8 + 6x^7 + 18x^5 - 3x^4 - 28x^6 - 14x^5 - 42x^3 - 7x^2 + 4x^5 + 2x^4 + 6x^2 - x = 12x^8 + 6x^7 - 28x^6 + 8x^5 - x^4 - x^2 - x$

V – Racines d'un polynômes – factorisation d'un polynôme

1 – racine d'un polynôme

Définition

On dit qu'un réel α est une racine ou un zéro d'un polynôme f si $f(\alpha) = 0$

Exemple :

Soit $f(x) = 4x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 9x + 14$ on a $f(-2) = 4(-2)^4 + 5(-2)^3 - 14(-2)^2 - 9(-2) + 14 = 4 \times 16 + 5 \times (-8) - 14 \times 4 + 18 + 14 = 64 - 40 - 56 + 32 = 96 - 96 = 0$ donc -2 est une racine (ou un zéro) de f

2 – factorisation d'un polynôme

Définition

Soit P et Q deux polynômes. On dit que le polynôme P est factorisable par le polynôme Q s'il existe un polynôme R tel que pour tout réel x , $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$

Exemple :

Soit $P(x) = 3x^3 - 13x^2 - 11x + 5$

- Vérifier que -1 et 5 sont des racines de P

$$P(-1) = 3(-1)^3 - 13(-1)^2 - 11(-1) + 5 = -3 - 13 + 11 + 5 = -16 + 16 = 0$$

$$P(5) = 3(5)^3 - 13(5)^2 - 11(5) + 5 = 3 \times 125 - 13 \times 25 - 55 + 5 = 375 - 325 - 55 + 5 = 380 - 380 = 0$$

2) Factoriser P

On a -1 et 5 sont des racines de P donc P s'écrit $P(x) = (x+1)(x-5)Q(x)$

Comme $d^0(P)=3$ on tire que $d^0(Q)=1$ alors Q s'écrit $Q(x) = a_1x + a_0$ donc on obtient

$$P(x) = (x+1)(x-5)(a_1x + a_0) = a_1x^3 + a_0x^2 - 5a_1x^2 - 5a_0x + a_1x^2 + a_0x - 5a_1x - 5a_0 = a_1x^3 + (a_0 - 4a_1)x^2 - (5a_1 + 4a_0)x - 5a_0$$

Par identification on tire $a_1 = 3$, $a_0 - 4a_1 = -13$, $-(5a_1 + 4a_0) = -11$, $-5a_0 = 5$ soit alors $a_1 = 3$, $a_0 = -1$ donc $P(x) = (x+1)(x-5)(3x+1)$

3 - Polynômes symétriques de degré 3

Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$ un polynôme de degré 3

On a -1 est une racine de f et on obtient la factorisation de f tel que $f(x) = (x+1)Q(x)$

Où $Q(x)$ est un trinôme du second degré qui s'écrit $Q(x) = ax^2 + (b-a)x + a$ tel que son discriminant $\Delta = (b-3a)(b+a)$

Si $a > 0$ on obtient le tableau suivant

b	$-\infty$	$-a$	$3a$	$+\infty$
$\text{sig}(b-3a)$	-	-	+	+
$\text{sig}(b+a)$	-	+	+	+
$\text{Sig } \Delta$	+	-	+	+

Si $a < 0$ on obtient le tableau suivant

b	$-\infty$	$3a$	$-a$	$+\infty$
$\text{sig}(b-3a)$	-	-	+	+
$\text{sig}(b+a)$	-	+	+	+
$\text{Sig } \Delta$	+	-	+	+

a) On a : * Si $[a > 0 ; -a < b < 3a]$ ou $[a < 0 ; 3a < b < -a]$

alors f admet une solution unique $x=-1$; $f(x) = a(x+1)\left(x^2 + \frac{b-a}{a}x + 1\right)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\text{Sig}(x+1)$	-	+	+
$\text{Sig } Q(x)$	+	+	+
$\text{Sig } f(x)$	$\text{Sig } (-a)$	$\text{Sig } (a)$	

b) Si $b = -a$ alors f admet une racine simple $x=-1$ et une racine double $x=1$;

$$f(x) = a(x+1)(x-1)^2$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
Sig(x+1)	-	+	+	+
Sig $(x-1)^2$	+	+	+	+
Sig f(x)	Sig $(-a)$	Sig (a)	Sig (a)	Sig (a)

c) Si $b=3a$ alors f admet une racine triple $x=-1$; $f(x) = a(x+1)^3$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sig(x+1)	-	+	+
Sig $(x+1)^3$	-	+	+
Sig f(x)	Sig $(-a)$	Sig (a)	Sig (a)

d) Si $[a > 0 ; b < -a \text{ ou } b > 3a] \text{ ou } [a < 0 ; b < 3a \text{ ou } b > -a]$

Alors f admet trois racines distinctes

Démonstration :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$$

1) $f(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + b(-1) + a = -a + b - b + a = 0$ donc -1 est une racine de f

2) $f(x) = (x+1)Q(x) = (x+1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + (\alpha + \beta)x^2 + (\beta + \gamma)x + \gamma$ par identification on tire que $\alpha = a ; \alpha + \beta = b ; \beta + \gamma = b ; \gamma = a$ donc $\alpha = \gamma = a$ et $\beta = b - a$ et par la suite $Q(x) = ax^2 + (b-a)x + a$

3) $Q(x) = ax^2 + (b-a)x + a$

$$\text{On a } \Delta = (b-a)^2 - 4a^2 = (b-a-2a)(b-a+2a) = (b-3a)(b+a)$$

Etudions le signe de Δ

$$\Delta = 0 \text{ équivaut } b = 3a \text{ ou } b = -a$$

Si $a > 0$ on obtient le tableau suivant

b	$-\infty$	$-a$	$3a$	$+\infty$
sig $(b-3a)$	-	-	+	+
sig $(b+a)$	-	+	+	+
Sig Δ	+	-	+	+

Si $a < 0$ on obtient le tableau suivant

b	$-\infty$	$3a$	$-a$	$+\infty$
sig $(b-3a)$	-	-	+	+
sig $(b+a)$	-	+	+	+
Sig Δ	+	-	+	+

a) Si $[a > 0 ; -a < b < 3a] \text{ ou } [a < 0 ; 3a < b < -a]$

On $\Delta < 0$ donc Q n'admet pas de solutions et alors f n'admet qu'une solution unique $x=-1$

$$\text{et } f(x) = (x+1)Q(x) = a(x+1)\left(x^2 + \frac{b-a}{a}x + 1\right) = a(x+1)R(x)$$

on a $x^2 + \frac{b-a}{a}x + 1 > 0$ soit les tableaux de signes de f suivants

Si $a > 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sig(x+1)	-	+	
Sig R(x)	+	+	
Sig f(x)	-	+	

Si $a < 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sig(x+1)	-	+	
Sig R(x)	+	+	
Sig f(x)	+	-	

Soit donc le tableau récapitulatif

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sig(x+1)	-	+	
Sig Q(x)	+	+	
Sig f(x)	Sig (-a)	Sig (a)	

- b) Si $b = -a$ alors $Q(x) = ax^2 - 2ax + a = a(x-1)^2$ et Q admet une racine double $x=1$ donc $f(x) = a(x+1)(x-1)^2$ alors f admet une racine simple $x=-1$ et une racine double $x=1$ et par la suite On obtient le tableau de signe de f

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
Sig(x+1)	-	+	+	
Sig $(x-1)^2$	+	+	+	
Sig f(x)	Sig (-a)	Sig (a)	Sig (a)	

- c) Si $b=3a$ alors $Q(x) = ax^2 + 2ax + a = a(x+1)^2$ et Q admet une racine double $x=-1$ donc $f(x) = a(x+1)^3$ alors f admet une racine triple $x=-1$ On obtient le tableau de signe de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sig(x+1)	-	+	
Sig $(x+1)^3$	-	+	
Sig f(x)	Sig (-a)	Sig (a)	

- d) Si $[a > 0 ; b < -a \text{ ou } b > 3a] \text{ ou } [a < 0 ; b < 3a \text{ ou } b > -a]$

On a $\Delta > 0$ donc Q admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{a-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{a-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Comparons les racines de f

Comparons x_1 et -1 : $x_1 - (-1) = x_1 + 1 = \frac{(3a-b)-\sqrt{\Delta}}{2a}$

* Si $a > 0$

On a $x_1 + 1 = \frac{(3a-b)-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{(b-3a)+\sqrt{\Delta}}{2a} < 0$ car $b-3a > 0$ et $\sqrt{\Delta} > 0$ et donc $x_1 < -1$

* Si $a < 0$

On a $x_1 + 1 = \frac{(3a-b)-\sqrt{\Delta}}{2a}$ comparons $(3a-b)$ et $\sqrt{\Delta}$ revient à comparer $(3a-b)^2$ et Δ
 $(3a-b)^2 - \Delta = (3a-b)^2 - (b-3a)(b+a) = (3a-b)^2 + (3a-b)(b+a)$
 $= (3a-b)(3a-b+b+a) = 4a(3a-b) < 0$ donc $(3a-b)^2 < \Delta$
et par la suite $(3a-b) < \sqrt{\Delta}$ et donc $x_1 < -1$

Comparons x_2 et -1 par un calcul analogue on trouvera que $x_2 > -1$

Donc on tire $x_1 < -1 < x_2$ et $f(x) = a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)$ admet trois racines

distinctes soit alors le tableau de signe de f

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	$+\infty$
$\text{sig}(x+1)$	—	—	+	+	
$\text{sig}(x-x_1)$	—	+	+	+	
$\text{sig}(x-x_2)$	—	—	—	+	
$\text{sig}f(x)$	$\text{sig}(-a)$	$\text{sig}(a)$	$\text{sig}(-a)$	$\text{sig}(a)$	

Exemple :

Résoudre l'équation $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$ et préciser le signe de f

On a $x = -1$ est une racine de f en effet $f(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 5(-1) + 2 = -2 + 5 - 5 + 2 = -7 + 7 = 0$

Il existe un polynôme de degré 2 $Q(x)$ tel que $f(x) = (x+1)Q(x)$ où $Q(x) = 2x^2 + 3x + 2$

Or $Q(x) = 0$ soit $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$ on obtient la factorisation de f

$f(x) = 2(x+1)(x^2 + \frac{3}{2}x + 1)$ et on tire le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\text{Sig}(x+1)$	—	+	
$\text{Sig}(x^2 + \frac{3}{2}x + 1)$	+	+	
$\text{Sig} f(x)$	—	+	

4 – Fonction rationnelles

Soit f et g deux fonctions polynômes

La fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction rationnelle

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

Exemple :

$$\text{Soit } f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x^2+x-2}$$

1) Le domaine de définition de f : f n'a un sens que si et seulement si $x^2 + x - 2 \neq 0$

$x^2 + x - 2 = 0$ on a $1+1-2=0$ alors $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ donc f est définie pour tout $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

et $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

2) Factorisons $x^2 + 5x - 6 = 0$ on a $1+5+(-6)=0$ alors $x_1 = 1$ et $x_2 = -6$

$$x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6)$$

3) Simplifions $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+6)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x+6)}{(x+2)}$

4) Etudions le signe de f

x	$-\infty$	-6	-2	$+\infty$
$\text{Sig}(x+6)$	—	+	+	
$\text{Sig}(x+2)$	—	—	+	
$\text{Sig} f(x)$	+	—	+	