

# Problème du 1<sup>er</sup> degré et du second degré

## D) Equations du 1<sup>er</sup> degré :

- Méthode de résolution d'une équation du type  $ax + b = 0$ .

Si  $a \neq 0$  alors l'équation admet pour solution  $-\frac{b}{a}$  et l'ensemble des

$$\text{solutions } S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

Si  $a = 0$  alors deux cas se présentent :

Si  $b = 0$

Alors l'équation devient

$$0 \cdot x = 0$$

$$S = \mathbb{R}$$

Si  $b \neq 0$

$b = 0$  impossible

$$S = \emptyset$$

- Savoir développer et factoriser

- Développer : effectuer dans une expression, toutes les multiplications possibles, enlever les parenthèses (attention aux signes) par exemple :

$$(x-2)^2 - (x-3)(2x+5) = x^2 - 4x + 4 - (2x^2 + 5x - 6x - 15)$$

$$= x^2 - 4x + 4 - 2x^2 - 5x + 6x + 15$$

$$= -x^2 - 3x + 19$$

- Factoriser : C'est l'opération inverse, transformer une somme en un produit ; la factorisation nécessite un petit travail de réflexion ; existe-t-il un facteur en commun, il arrive qu'un facteur commun soit caché :

$(x+2)^2 - 4x - 8 = (x+2)^2 - 4(x+2)$  mais le facteur peut se cacher derrière les identités remarquables :

$$x^3 + 1 + (x+1)^2 = (x+1)(x^2 - x + 1) + (x+1)^2.$$

### ■ Autres types d'équations :

- avec des fractions : Exemple type :

❖ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\frac{2x+3}{x+5} = 1$  l'écriture n'existe que si  $x+5 \neq 0 \Leftrightarrow$

$$x \neq -5$$

soit  $D$  l'ensemble de définition  $D = \mathbb{R} - \{-5\}$

$$\frac{2x+3}{x+5} = 1 \Leftrightarrow 2x+3 = x+5 \Leftrightarrow x=2 \text{ et } 2 \in D$$

donc  $S = \{2\}$ .

- avec des valeurs absolues :

❖ Exemples du types :  $|x+1| = |2x-2|$

On utilise le théorème  $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b$

Alors l'équation devient :  $x+1 = 2x-2$  ou  $x+1 = -2x+2$

$$\text{soit } x=3 \text{ ou } x=\frac{1}{3}$$

$$S = \left\{ 3, \frac{1}{3} \right\}$$

$$|x+1| + x = |-x+3| + 1$$

dans ce cas il faut faire un tableau pour éliminer les valeurs absolues

| $x$      | $-\infty$ | $-1$       | $3$        | $+\infty$ |
|----------|-----------|------------|------------|-----------|
| $x+1$    | $-$       | $\bigcirc$ | $+$        | $+$       |
| $ x+1 $  | $-x-1$    | $x+1$      | $x+1$      | $x+1$     |
| $-x+3$   | $+$       | $+$        | $\bigcirc$ | $-$       |
| $ -x+3 $ | $-x+3$    | $-x+3$     | $x-3$      | $x-3$     |

Si  $x \in ]-\infty, -1]$  alors l'équation s'écrit :

$$-x-1+x = -x+3+1 \Leftrightarrow -x+3+1 \Leftrightarrow -1 = -x+4 \Leftrightarrow$$

$$x=5 \notin ]-\infty, -1] \quad \text{donc pas de solution sur } ]-\infty, -1]$$

Si  $x \in [-1, 3]$  alors l'équation devient :

$$x+1+x = -x+3+1 \Leftrightarrow x=1 \in [-1, 3] \text{ donc } 1 \text{ est une solution.}$$

Si  $x \in [3, +\infty[$  alors, l'équation devient :

$$x+1+x = x-3+1 \Leftrightarrow X=-3 \notin [3, +\infty[$$

pas de solutions dans  $[3, +\infty[$

**Conclusion :**  $S = \{1\}$

- Equation du type  $\sqrt{A(x)} = B(x)$

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^2 \end{cases}$$

## II) Inéquation du 1er degré :

- Il faut écrire l'inéquation sur la forme  $ax + b \geq 0$  ( $ax + b > 0$  ou  $ax + b \leq 0$  ou  $ax + b < 0$ )

Si  $a \neq 0$

|          |                 |                |                |
|----------|-----------------|----------------|----------------|
| $x$      | $-\infty$       | $\frac{-b}{a}$ | $+\infty$      |
| $ax + b$ | Signe de $(-a)$ | $\emptyset$    | Signe de $(a)$ |

Il suffit de lire sur le tableau l'ensemble des solutions.

Si  $a = 0$  : l'inéquation devient  $b \geq 0$

si  $b$  est un réel positif alors  $S = \mathbb{R}$

si  $b$  est un réel strictement négatif alors  $S = \emptyset$

- Savoir développer et factoriser (même remarque que dans les équations).

### ■ Autres types d'inéquation :

- avec des fractions : il faut chercher l'ensemble de définition  $D$  avant de commencer la résolution.

- avec des valeurs absolues :

$$\diamond |A(x)| \leq |B(x)| \Leftrightarrow |A(x)|^2 \leq |B(x)|^2$$

$$\Leftrightarrow [A(x) - B(x)][A(x) + B(x)] \leq 0$$

et faire des simplifications ensuite un tableau de signe.

$\diamond |A(x)| + x < |B(x)|$  il faut faire un tableau et le même raisonnement que les équations.

## III) Equations du second degré

- **Définition :** On appelle équation du second degré d'inconnue  $x$  toute équation de la forme :  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \neq 0$   
 $a, b, c$  des réels.

■ Résolution d'une équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On vérifie :

Si  $a + b + c = 0$  alors les solutions sont : 1 et  $-\frac{c}{a}$ .

Si  $a - b + c = 0$  alors les solutions sont : -1 et  $-\frac{c}{a}$ .

Si  $b = 2b'$  alors on calcul  $\Delta' = b'^2 - ac$

• Si  $\Delta' > 0$  alors les solutions :  $x' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$  et

$$x'' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

• Si  $\Delta' = 0$  alors les solutions :  $x' = x'' = -\frac{b'}{a}$  racine double.

• Si  $\Delta' < 0$  alors pas de solution.

Si non : on calcul  $\Delta = b^2 - 4ac$

Si  $\Delta > 0$  alors les solutions sont :  $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si  $\Delta = 0$  alors l'équation admet une racine double  $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$ .

Si  $\Delta < 0$  alors pas de solution.

■ Théorèmes :

• Si  $ax^2 + bx + c = 0$  admet deux racines  $x'$  et  $x''$  alors

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

• Si  $a \times c < 0$  alors l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet deux racines de signes contraires.

• Si on a :  $S = x' + x''$  et  $P = x'x''$  alors  $x'$  et  $x''$  vérifient l'équation  $x^2 - Sx + P = 0$ .

#### IV) Inéquations du second degré

##### ■ Signe d'un trinôme :

Un trinôme du second degré s'écrit de la forme :  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$  ;  $x'$  et  $x''$  les solutions  $x' < x''$

| $x$             | $-\infty$    | $x'$       | $x''$           | $+\infty$    |
|-----------------|--------------|------------|-----------------|--------------|
| $ax^2 + bx + c$ | Signe de $a$ | $\bigcirc$ | Signe de $(-a)$ | Signe de $a$ |

$$\underline{\Delta = 0} ; x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

| $x$             | $-\infty$    | $x'$       | $+\infty$    |
|-----------------|--------------|------------|--------------|
| $ax^2 + bx + c$ | Signe de $a$ | $\bigcirc$ | Signe de $a$ |

$$\underline{\Delta < 0}$$

| $x$             | $-\infty$    | $+\infty$    |
|-----------------|--------------|--------------|
| $ax^2 + bx + c$ | Signe de $a$ | Signe de $a$ |

- Remarque : de même pour  $\Delta'$ .

##### ■ Factorisation d'un trinôme :

Si  $\Delta > 0$  alors  $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$

Si  $\Delta = 0$  alors  $ax^2 + bx + c = a(x - x')^2$

Si  $\Delta < 0$  pas de factorisation possible.

##### ■ Inéquation du second degré :

- On appelle inéquation du second degré l'une des formes suivantes :

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c < 0 \quad (a \neq 0).$$

- Résolution :

Il suffit d'étudier le signe du trinôme.

Il en déduit les solutions de l'inéquation.