

A - GENERALITES SUR LES SUITES

1 Notion de suite

Définition 1

Une **suite** numérique est une liste infinie de nombres réels, numérotés généralement avec les indices entiers naturels consécutifs 0, 1, 2...
À chaque **rang** n (entier naturel) est associé un réel de la liste, u_n , appelé **terme** de la suite.

Attention:

ne pas confondre le terme général u_n et la suite (u_n) .

REMARQUES : • Toute la suite de termes $u_0 ; u_1 ; u_2 ; \dots ; u_{n-1} ; u_n ; u_{n+1} ; \dots$ se note globalement u ou (u_n) .

• Le réel u_n est appelé **terme général** de la suite.

EXEMPLE : Soit la suite $u : 1 ; 2 ; 6 ; 24 ; 120 ; \dots$. Le 1^{er} terme de rang 0, noté u_0 , est égal à 1, de même le 2^e terme de rang 1, noté u_1 , est égal à 2, etc.

Le terme général est donné par $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n+1)$.

Si on commence au rang $n = 1$, alors $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 6, u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

Définition 2

Une **suite** (u_n) est une **fonction définie sur $\mathbb{N}$** (ou à partir d'un rang n_0) qui, à chaque entier naturel n de $\mathbb{N}$ (ou pour $n \geq n_0$), associe un réel noté u_n .

Notation:

l'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$.

2 Formule explicite : u_n en fonction de n

Une suite (u_n) peut être définie par une **formule explicite** permettant d'exprimer directement u_n en fonction de n .

EXEMPLES : • (1) La suite (u_n) , définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n}{n+1}$, est telle que $u_n = f(n)$

où f est la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, $u_0 = f(0) = 0, u_3 = f(3) = \frac{3}{4}$, etc.

• La suite (v_n) telle que $v_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto \sqrt{x-4}$, n'est définie que si $n \geq 4$. On dit que la suite (v_n) est définie à **partir du rang 4** et cette suite se note $(v_n)_{n \geq 4}$. Les trois premiers termes sont $v_4 = f(4) = 0, v_5 = f(5) = 1$ et $v_6 = f(6) \approx 1,414$.

3 Relation de récurrence : u_{n+1} en fonction de u_n

- Une suite (u_n) peut être construite à partir d'un terme donné (en général le 1^{er} terme) et d'une **relation de récurrence** permettant d'exprimer u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n .

EXEMPLE : (2) Si on pose $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ où

f est la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$. $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{1}{2}$; $u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$; $u_3 = f(u_2) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$.

REMARQUES : • Les suites définies dans les exemples (1) et (2) sont différentes alors qu'elles sont fabriquées avec la même fonction f .

- La suite de l'exemple (2) serait différente si on modifiait la valeur de u_0 .
- On peut définir une suite par d'autres relations de récurrences ou par d'autres méthodes.

B - SUITES ARITHMETIQUES

1 Définition

Définition 3

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.
La constante réelle r s'appelle la **raison** de la suite (u_n) .

$$u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; \dots ; u_n ; u_{n+1} ; \dots$$

REMARQUE : Une suite arithmétique peut être définie de manière unique par son 1^{er} terme u_0 et sa raison r (qui donne la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n). Cette définition par récurrence impose cependant de connaître **tous les termes précédents** pour calculer un terme.

EXEMPLE : La suite (u_n) : $-10 ; -6 ; -2 ; 2 ; \dots$ est la suite arithmétique de 1^{er} terme $u_0 = -10$ et de raison $r = 4$. On peut la définir par : $u_0 = -10$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 4$.

2 Formule explicite u_n en fonction de n

Propriété 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 et de raison r .

- Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.
- Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n - p)r$.

$$u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; \dots ; u_p ; \dots ; u_n ; \dots$$

EXEMPLE : Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr = -10 + 4n$; ainsi, $u_{10} = -10 + 4 \times 10 = 30$.
On a aussi $u_n = u_3 + (n - 3)r = 2 + (n - 3) \times 4 = -10 + 4n$; ou encore $u_{10} = u_3 + 7r = 2 + 7 \times 4 = 30$.

REMARQUE : (u_n) est arithmétique lorsque $u_n = f(n)$ où f est une fonction affine.

3 Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété 2

La somme S de plusieurs termes consécutifs d'une suite arithmétique est telle que :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

REMARQUE : Dans le cas particulier des $n + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique, on a :

$$\sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n + 1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right).$$

EXEMPLE : Pour tout entier naturel n , on a $\sum_{i=1}^{i=n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démontrer que $\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

On pose $S = \sum_{i=1}^{i=n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$. ①

On a aussi $S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$. ②

En ajoutant ① et ② membre à membre, et en groupant deux par deux, on a :

$$2S = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \dots + (n - 2 + 3) + (n - 1 + 2) + (n + 1).$$

On reconnaît n fois le terme $(n + 1)$, donc $2S = n(n + 1)$ et, ainsi $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Commentaires

Le principe de cette démonstration peut être utilisé pour démontrer le cas plus général de la propriété 2.

C - SUITES GEOMETRIQUES

1 Définition

Définition 4

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = q u_n$.

La constante q non nulle s'appelle la **raison** de la suite (u_n) .

$$u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; \dots ; u_n ; u_{n+1} ; \dots$$

$\times q \quad \times q \quad \times q \quad \times q$

REMARQUE : Une suite géométrique peut être définie de manière unique par son 1^{er} terme u_0 et sa raison q (qui donne la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n). Cette définition impose cependant de connaître **tous les termes précédents** pour calculer un terme.

EXEMPLE : La suite $\frac{1}{16} ; \frac{1}{4} ; 1 ; 4 ; \dots$ est la suite géométrique de 1^{er} terme $u_0 = \frac{1}{16}$ et de raison $q = 4$.

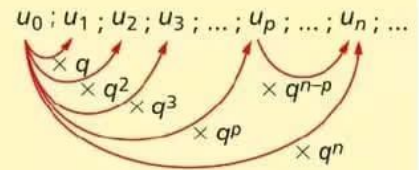
On peut la définir par $u_0 = \frac{1}{16}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 4 u_n$.

2 Formule explicite u_n en fonction de n

Propriété 3

Soit (u_n) une suite géométrique de 1^{er} terme u_0 et de raison q .

- Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$.
- Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p \times q^{n-p}$.



EXEMPLES : Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = \frac{1}{16} \times 4^n = \frac{1}{4^2} \times 4^n = 4^{n-2}$;

ainsi, $u_{10} = 4^8 = 65\,536$. On a aussi, par exemple, $u_n = u_3 \times q^{n-3} = 4 \times 4^{n-3} = 4^{n-2}$.

3 Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 4

Soit q un nombre réel avec $q \neq 0$ et $q \neq 1$. La somme S de plusieurs termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q est telle que : $S = (\text{1^{er} terme}) \times \left[\frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \right]$.

REMARQUE : Dans le cas particulier des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique, on a :

$$\sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démontrer que $\sum_{i=0}^{i=n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, avec $q \neq 1$

On a n un entier naturel et q un réel différent de 1.

On pose $S = \sum_{i=0}^{i=n} q^i = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$. ①

On a alors $qS = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$. ②

En retranchant ② de ① membre à membre, on a :

$S - qS = 1 - q^{n+1}$, donc $(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$.

Or $q \neq 1$ donc $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Commentaires

Le principe de cette démonstration peut être utilisé pour démontrer le cas plus général de la propriété 4.

Exercice N°1

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \\ U_0 = 1 \end{cases}$

- 1) Calculer U_1 et U_2
- 2) Montrer que la suite (U_n) est
ni géométrique, ni arithmétique.
- 3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n - 3$
 - a) Calculer V_0 et V_1 .
 - b) Montrer que la suite (V_n) est une
suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
 - c) Donner le terme générale de V_n
puis exprimer U_n en fonction de n .
- 4) Calculer V_7 puis $S = V_0 + V_1 + \dots + V_7$
- 5) Calculer $S' = V_0 - V_1 + V_2 - \dots + V_6 - V_7$

Exercice N°3

(u_n) et (v_n) deux suites réels

définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{u_n}.$$

- 1) a) Calculer : v_1 , v_2 et v_3 .
- b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.
- 2) Calculer v_n puis u_n en fonction de n

Exercice N°5

Soit (u_n) une la suite arithmétique telle que

$$u_5 = 125 \quad \text{et} \quad u_{16} = 48$$

- 1) Calculer la raison et le premier terme de (u_n) .
- 2) En déduire u_n en fonction de n .
- 3) Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = -127$?
- 4) partir de quel rang a-t-on $u_n < -250$.
- 5) Calculer : $S = u_{1989} + u_{1990} + \dots + u_{2021}$

Exercice N°2

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4u_n + 9.$$

- 1) a) Calculer : u_1 , u_2 et u_3 .
- b) La suite (u_n) est-elle une suite géométrique ?
- 2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 3$
 - a) Montrer que $v_{n+1} = 4u_n + 12$
 - b) En déduire que (v_n) est une suite géométrique de raison 4.
 - c) Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de n .
- 3) On pose $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$
et $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

Exercice N°4

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}.$$

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 2) La suite (u_n) est-elle une suite géométrique, arithmétique ?
- 3) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$
 - a) Calculer : v_1 , v_2 et v_3 .
 - b) Déterminer la nature de la suite (v_n) .
 - c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice N°6

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et

$$\text{Pour tout } n \geq 2 ; u_{n+1} = \frac{nu_n + 4}{n+1}$$

- 1) Calculer : u_2 .
- 2) Démontrer que la suite (v_n) définie par : $v_n = nu_n$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et sa raison.
- 3) En déduire v_n puis u_n en fonction de n .