

LYCÉE OUED-ELLIL

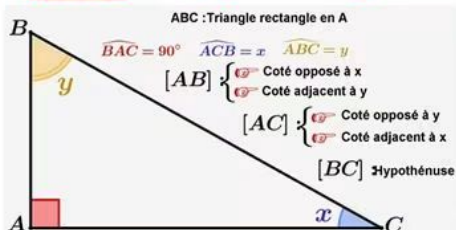
RÉSUMÉ : TRIGONOMETRIE-MESURE DE GRANDEURS

CLASSE : 2^{ÈME} SECONDAIRE / SECTION:SCIENCES

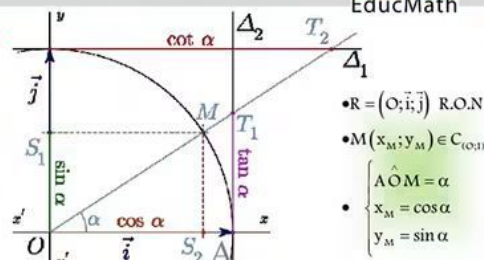
PROF : BELLASSOUED MOHAMED / ANNÉE SCOLAIRE 2020-2021



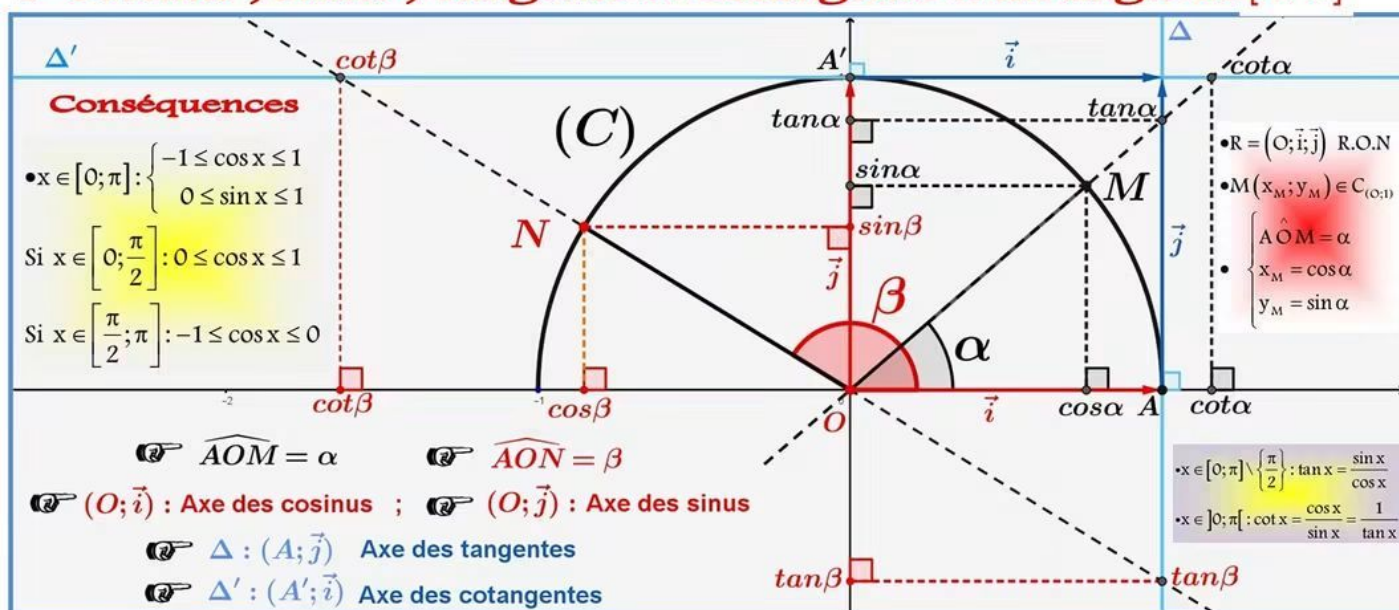
RAPPEL Rapports trigonométriques d'un angle aigu



- $\cos x = \frac{\text{adjacent}}{\text{l'hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$
- $\sin x = \frac{\text{opposé}}{\text{l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$
- $\tan x = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin x}{\cos x}$



1-Cosinus ; Sinus ; Tangente et Cotangente d'un angle de $[0; \pi]$



2-Relations fondamentales

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$x \in [0; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} : 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$x \in [0; \pi] : 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

3-Lignes trigonométrique des angles remarquables

Angles (rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Angles (d°)	0	30	45	60	90	120	135	150	180
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Angles complémentaires

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] : \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x \end{cases}$$

$$x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[: \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cot x$$

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[: \cot \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \tan x$$

Angles supplémentaires

$$x \in [0; \pi] : \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$$

$$x \in [0; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} : \tan(\pi - x) = -\tan x$$

$$x \in]0; \pi[: \cot(\pi - x) = -\cot x$$

4-La loi de sinus

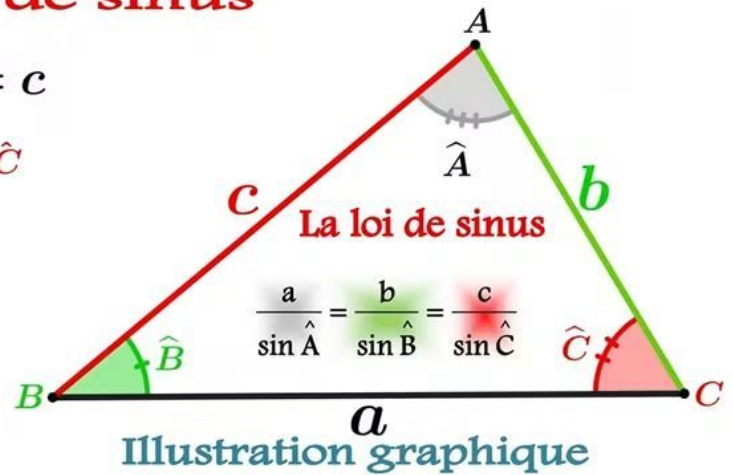
☞ $BC = a \quad AC = b \quad AB = c$

☞ $\widehat{BAC} = \hat{A} \quad \widehat{ABC} = \hat{B} \quad \widehat{ACB} = \hat{C}$



La loi de sinus

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$



Conséquence : Aire d'un triangle-cercle circonscrit au triangle

☞ $BC = a \quad AC = b \quad AB = c$

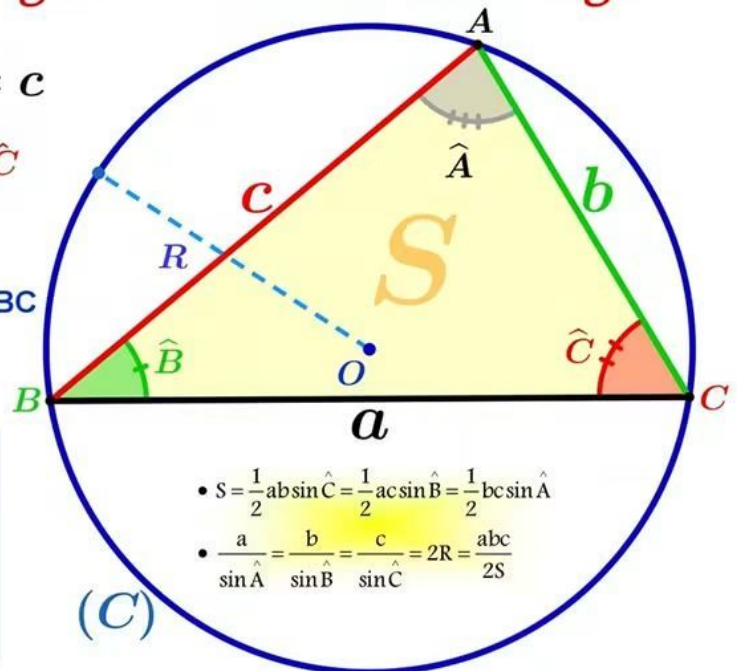
☞ $\widehat{BAC} = \hat{A} \quad \widehat{ABC} = \hat{B} \quad \widehat{ACB} = \hat{C}$

☞ S : Aire du triangle ABC

☞ (C) : Cercle circonscrit au triangle ABC

☞ R : Rayon du cercle (C)

- $S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$
- $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$



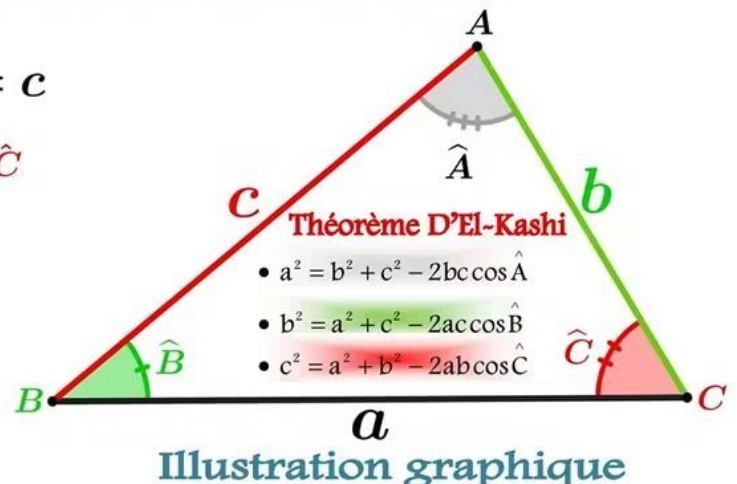
5-Théorème D'El-Kashi : La loi de cosinus

☞ $BC = a \quad AC = b \quad AB = c$

☞ $\widehat{BAC} = \hat{A} \quad \widehat{ABC} = \hat{B} \quad \widehat{ACB} = \hat{C}$



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$



6-Isométrie des triangles : Caractérisation des triangles isométriques

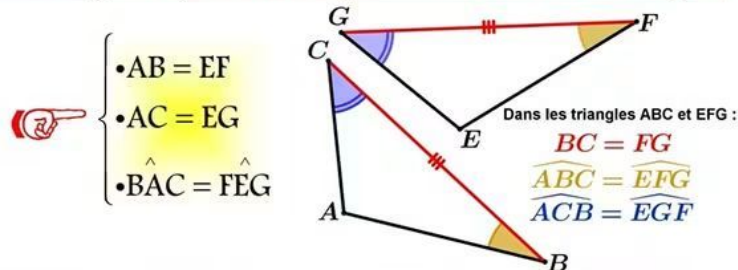
Définition : On dit que deux triangles sont isométriques si leurs cotés sont deux à deux égaux

☞ Si deux triangles sont isométriques ; alors les autres éléments homologues sont égaux

Premier cas d'isométrie des triangles

☞ Si deux triangles ont un coté égal compris entre deux angles respectivement égaux alors ils sont isométriques

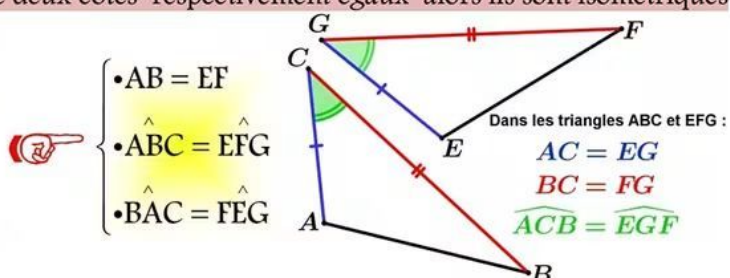
$$\bullet (ABC \text{ et } EFG \text{ isométriques}) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet BC = FG \\ \bullet \hat{ABC} = \hat{EFG} \\ \bullet \hat{ACB} = \hat{EGF} \end{cases}$$



Deuxième cas d'isométrie des triangles

☞ Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux cotés respectivement égaux alors ils sont isométriques

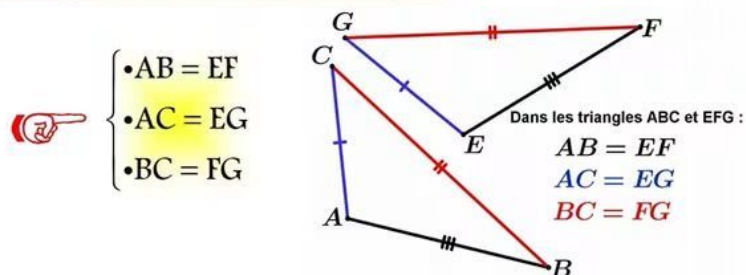
$$\bullet (ABC \text{ et } EFG \text{ isométriques}) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet AC = EG \\ \bullet BC = FG \\ \bullet \hat{ACB} = \hat{EGF} \end{cases}$$



Troisième cas d'isométrie des triangles

☞ Si deux triangles ont trois cotés égaux respectivement égaux alors ils sont isométriques

$$\bullet (ABC \text{ et } EFG \text{ isométriques}) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet AB = EF \\ \bullet AC = EG \\ \bullet BC = FG \end{cases}$$



Remarque : Les applications suivantes : symétrie axiale ; symétrie centrale ; translation et rotation conservent les distances. On dit que chacune des applications précédentes est une isométrie. Ainsi : Deux triangles dont l'un est l'image de l'autre par une isométrie sont deux triangles isométriques

7-Similitude des triangles : Caractérisation des triangles semblables

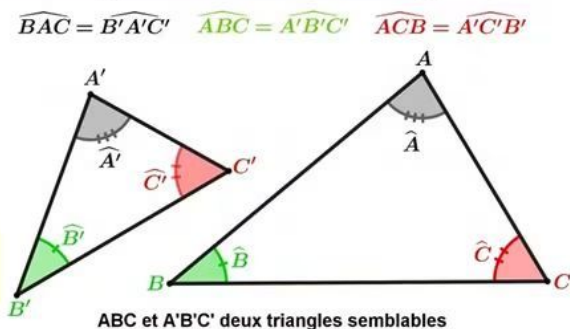
Définition : On dit que deux triangles sont semblables si leurs angles sont deux à deux égaux

Théorème : $(ABC \text{ et } A'B'C' \text{ deux triangles semblables})$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

Autrement dit :

Si les cotés de l'un des deux triangles sont proportionnels Aux cotés de l'autre alors les deux triangles sont semblables

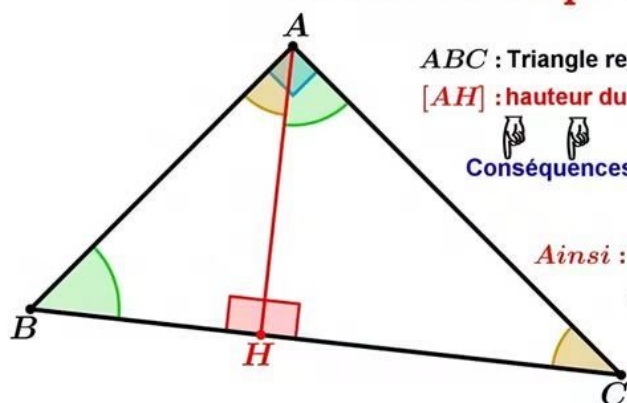


Notation : $ABC \cong A'B'C'$

☞ Le réel k s'appelle : le rapport de la similitude

☞ **Remarque :** Si l'un des deux triangles est l'image de l'autre par une homothétie (deux triangles homothétiques) alors les deux triangles sont semblables

8-Relations métriques dans un triangle rectangle



ABC : Triangle rectangle en A

$[AH]$: hauteur du triangle ABC

Conséquences : $\begin{cases} \widehat{ABH} = \widehat{CAH} \\ \widehat{ACH} = \widehat{BAH} \end{cases}$

Ainsi : Les trois triangles HAB ; HAC et ABC sont semblables deux à deux

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ AH \cdot BC &= AB \cdot AC \\ AH^2 &= HB \cdot HC \\ AB^2 &= BH \cdot BC \\ AC^2 &= CH \cdot CB \end{aligned}$$

Démonstration :

On utilisant la similitude des triangles et par conséquent :

les cotés homologues opposés aux angles égaux des deux triangles semblables sont proportionnels

On respecte l'ordre des sommets des deux triangles semblables ; on aura :

ABH et CAH sont semblables : $ABH \cong CAH \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH$ Ainsi : $AH^2 = HB \cdot HC$

ABC et HBA sont semblables : $ABC \cong HBA \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow AB^2 = HB \cdot BC$ Ainsi : $AB^2 = HB \cdot BC$

ABC et HAC sont semblables :

$$ABC \cong HAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow AC^2 = HC \cdot BC & \text{Ainsi : } AC^2 = HC \cdot BC \\ \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{HA} \Rightarrow AC \cdot AB = BC \cdot HA & \text{Ainsi : } AH \cdot BC = AB \cdot AC \end{cases}$$

Conséquence : Théorème de Pythagore

$$\underbrace{AB^2}_{HB \cdot BC} + \underbrace{AC^2}_{HC \cdot BC} = HB \cdot BC + HC \cdot BC = BC \cdot \underbrace{(HB + HC)}_{BC} = BC^2 \quad \text{Ainsi : } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

EXERCICE: 4.5 POINTS

BAREME

ABC un triangle rectangle en A inscrit dans le demi cercle de centre O et de rayon 1 (figure 3)

$\widehat{ABO} = x$ et $\widehat{AOC} = 2x$

1-Montrer que $AB = 2 \cos x$

2-a-Justifier que $\sin(\widehat{AOB}) = \sin 2x$

b-On appliquant la loi de sinus dans le triangle OAB ,

Montrer que $\sin(2x) = AB \sin x$

c-En déduire que $\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$

d-En déduire que $\sin x + \cos x = \sqrt{1 + \sin(2x)}$

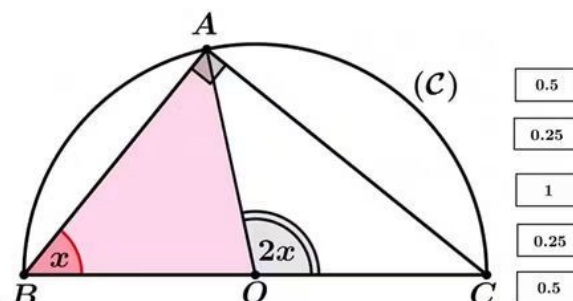


Figure 3

Application

3-a- Montrer que $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

b- Sachant que $\sin \frac{\pi}{12} < \cos \frac{\pi}{12}$; déduire que : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$