

Devoir de contrôle de mathématiques n°1

Date : 26 Octobre 2019

Durée : 1 heure

Professeur : Ojiba Zied

Classes : 2^{ème} Sciences 1

Nom et prénom : _____

Exercice n°1 : (4 points)

Cocher la ou les bonne(s) réponse(s) :

- 1) Soit a un réel non nul alors l'équation $ax^2 + 2x - a = 0$ possède :

☐ possède deux racines positives ☐ possède deux racines distinctes ☐ possède une racine double ☐ ne possède pas de racines

- 2) Le domaine d'existence de l'expression $\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}$ est :

☐ $]-1, +\infty[$ ☐ $[1, +\infty[$ ☐ $]-\infty, -1[$ ☐ $]-\infty, -1]$

- 3) Le déterminant $\begin{vmatrix} -1 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix}$ est égal à :

☐ 2 ☐ -8 ☐ 0 ☐ 8

- 4) Dans le plan est muni d'une base orthonormée, on donne le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors :

☐ $\|\vec{u}\| = 1$ ☐ $\|\vec{u}\| = 5$ ☐ $\|\vec{u}\| = \sqrt{7}$ ☐ $\|\vec{u}\| = \sqrt{-3^2 + 4}$

Exercice n°2 : (5 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $|2x-1| = |2-x|$
 b) $\frac{x+3}{x-1} = 2$
 c) $\sqrt{x+2} = 4$
 d) $\sqrt{x+1} = \sqrt{3-x}$

Exercice n°3 : (5 points)

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2x^2 + 2x - 4 = 0$
 b) Factoriser l'expression $2x^2 + 2x - 4$
 c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{x-1}{2x^2 + 2x - 4} = 1$
 2) a) Etudier le signe de l'expression $x^2 + 7x + 10$
 b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2 + 7x + 10} = 2$

Exercice n°4 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A(4,2), B(5,-3) et C(3,-1)

- 1) a) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$
 b) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
 2) Soit D le point du plan tel que $\vec{AD} = \frac{3}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}$
 a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{AD}$
 b) En déduire que les coordonnées de D sont (2,0)
 3) a) Vérifier que $\mathcal{B} = (\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan
 b) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{BD}$ dans la base $\mathcal{B}$

Devoir de contrôle de mathématiques n°1

Date : 26 Octobre 2019.

Durée : 1 heure

Professeur : Oujda Nid

Classes : 2^{ème} Sciences 1

Correction

Exercice n°1 : (4 points)

1) Soit a un réel non nul alors l'équation $ax^2 + 2x - a = 0$ possède :

☐ possède deux racines positives

☒ possède deux racines distinctes

☐ possède une racine double

☐ ne possède pas de racines

2) Le domaine d'existence de l'expression $\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}$ est :

☒ $] -1, +\infty[$

☐ $[1, +\infty[$

☐ $] -\infty, -1[$

☐ $] -\infty, -1]$

3) Le déterminant $\begin{vmatrix} -1 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix}$ est égal à :

☐ 2

☐ -8

☒ 0

☐ 8

4) Dans le plan est muni d'une base orthonormée, on donne le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors :

☐ $\|\vec{u}\| = 1$

☒ $\|\vec{u}\| = 5$

☐ $\|\vec{u}\| = \sqrt{7}$

☐ $\|\vec{u}\| = \sqrt{-3^2 + 4}$

Exercice n°2 : (5 points)

a) $|2x-1| = |2-x| \Leftrightarrow 2x-1 = 2-x \text{ ou } 2x-1 = x-2$
 $\Leftrightarrow 3x = 3 \text{ ou } x = -1$
 $\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$

$$S_R = \{-1, 1\}$$

b) $\frac{x+3}{x-1} = 2$

Il faut que $x-1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$ donc $DE = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Pour $x \in DE$, $\frac{x+3}{x-1} = 2 \Leftrightarrow x+3 = 2(x-1) \Leftrightarrow x+3 = 2x-2 \Leftrightarrow x = 5$ donc $S_R = \{5\}$

c) $\sqrt{x+2} = 4$

Il faut $x+2 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq -2$ donc $DE = [-2, +\infty[$

Pour $x \in DE$, $\sqrt{x+2} = 4 \Leftrightarrow x+2 = 16 \Leftrightarrow x = 14$ donc $S_R = \{14\}$

d) $\sqrt{x+1} = \sqrt{3-x}$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x+1$	-	$\oplus$	+	+
$3-x$	+	+	$\oplus$	-

$$DE = [-1, 3]$$

Pour $x \in DE$, $\sqrt{x+1} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x+1 = 3-x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ donc $S_R = \{1\}$

Exercice n°3 : (5 points)

1) a) (E) : $2x^2 + 2x - 4 = 0$ $2+2-4 = 0$ donc $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{-4}{2} = -2$

$$S_R = \{-2, 1\}$$

b) $2x^2 + 2x - 4 = 2(x-1)(x+2)$

c) $\frac{x-1}{2x^2 + 2x - 4} = 1$

Il faut que $2x^2 + 2x - 4 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq -2$ donc $DE = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

Pour $x \in DE$, $\frac{x-1}{2x^2+2x-4} = 1 \Leftrightarrow x-1 = 2x^2+2x-4 \Leftrightarrow 2x^2+x-3=0$

$2+1-3=0$ donc $x_1=1$ (à rejeter) et $x_2=-\frac{3}{2}$

$S_R = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

2) a) $x^2+7x+10=0$ $\Delta=7^2-4 \times 10=9$ donc $x_1=\frac{-7-3}{2}=-5$ et $x_2=\frac{-7+3}{2}=-2$

x	$-\infty$	-5	-2	$+\infty$	
$x^2+7x+10$	$+$	$\bigcirc$	$-$	$\bigcirc$	$+$

b) $\sqrt{x^2+7x+10}=2$ $DE =]-\infty, -5] \cup [-2, +\infty[$

Pour $x \in DE$, $\sqrt{x^2+7x+10}=2 \Leftrightarrow x^2+7x+10=4 \Leftrightarrow x^2+7x+6=0$

$1-7+6=0$ donc $x_1=-1$ et $x_2=-6$

$S_R = \{-6, -1\}$

Exercice n°4 : (6 points)

1) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -3 - (-1) \times (-5) = -8 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés

2) a) $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) D'autre part $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x_D - 4 \\ y_D - 2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x_D - 4 = -2 \\ y_D - 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 0 \end{cases}$ et par suite $D(2,0)$

3) a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

b) $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

Exercice n°1 :

Résoudre dans IR chacune des équations ou inéquations suivantes :

- 1) $2|x-1| - 3|2x+4| = 0$
- 2) $\sqrt{-2x+1} = x-1$
- 3) $\sqrt{2x+1} \leq \sqrt{-x+2}$

Exercice n°2 :

Soient a, b et c trois réels strictement positifs

- 1) a) Montrer que $\frac{1}{ab} \geq \frac{2}{a^2+b^2}$
b) Dédire que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2(a+b)}{a^2+b^2}$
c) Montrer alors que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2}$
- 2) a) Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$
b) vérifier que $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$
c) En déduire que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$
d) Montrer alors que $\frac{1}{2\pi-1} + \frac{1}{4-\pi} + \frac{1}{6-\pi} \geq 1$

Exercice n°3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A(5 ; -2), B(1 ; 0) et C(-1 ; -4).

On désigne par I le milieu du segment [AC].

- 1) a) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$.
b) En déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle de sommet principal B.
- 2) Calculer la distance BI.
- 3) Soit E l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\|\vec{MA} + \vec{MC}\| = 2\sqrt{10}$
a) Montrer que le point B appartient à l'ensemble E.
b) Déterminer et construire l'ensemble E.
- 4) soit G le centre de gravité du triangle ABC.
a) Déterminer les coordonnées du point G dans le repère $(B, \vec{BA}, \vec{BC})$
b) Dédire que $G(\frac{5}{3}; -2)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 5) soit F(7 ; 2), vérifier que les points C, F et G sont alignés.