

Exercice 1 : (4pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1°/ a- Calculer u_0 ; u_1 et u_2

b- La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Justifier votre réponse.

2°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

a- Calculer S_1

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_n = \sqrt{n+1}$.

c- En déduire la valeur de S_{120}

Exercice 2 : (8pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique tel que $u_{10} = 55$ et $u_{25} = 145$

1°/ a -Montrer que la suite (u_n) est de raison $r = 6$ et que son premier terme $u_0 = -5$.

b -Calculer la somme $S = 55 + 61 + 67 + \dots + 145$.

2°/ Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{2}(u_n + 1) + n$.

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) + 1$

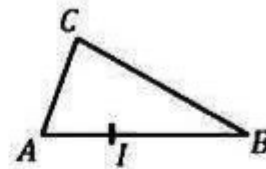
b- En déduire que v_n est une suite arithmétique de raison $r' = 4$ et de premier terme $v_0 = -2$.

c- Ecrire le terme général de la suite v_n .

3°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on donne $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{2n+5}$. Calculer S_{10}

Exercice 3 : (8pts)

La figure ci-contre est celle d'un triangle ABC tel que $AB = 2AC$ et I le barycentre de (A,2) et (B,1)



Soit l'application h définie par

$$h: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$M \mapsto M' \text{ tel que } 2\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

1°/a- Vérifier que $h(B) = A$.

b- Montrer que l'application h admet un seul point invariant.

c- Montrer que h est l'homothétie de centre I et rapport $\left(-\frac{1}{2}\right)$

2°/ La droite Δ parallèle à (BC) passant par A coupe la droite (IC) en C' .

a- Justifier que $h((BC)) = \Delta$.

b- Montrer que $h(C) = C'$.

3°/ On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre B passant par A et le cercle $\mathcal{C}'$ de centre A passant par C

a- Justifier que $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$

b- Le cercle $\mathcal{C}'$ coupe [AI] en A' . Montrer que $h(A) = A'$.

Ex 1

$$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\begin{aligned} 1^\circ / a / \quad U_0 &= \sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1 \\ U_1 &= \sqrt{1+1} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1 \\ U_2 &= \sqrt{2+1} - \sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b / \quad U_1 - U_0 &= (\sqrt{2} - 1) - 1 = \sqrt{2} - 2 \\ U_2 - U_1 &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ $\Rightarrow$ donc la suite n'est pas arithmétique

$$2^\circ / \quad S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

$$a / \quad S_1 = U_0 + U_1 = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} b / \quad S_n &= U_0 + U_1 + \dots + U_n \\ &= (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

$$c / \quad S_{120} = \sqrt{120+1} = \sqrt{121} = 11$$

Ex 2

$$U_{10} = 55, \quad U_{25} = 145$$

$$a / \quad \frac{U_{25} - U_{10}}{25 - 10} = \frac{145 - 55}{15} = \frac{90}{15} = 6 \quad \text{donc } (U_n) \text{ suite arith de raison } r=6$$

$$U_{10} = U_0 + 10 \times 6 \Leftrightarrow 55 = U_0 + 60 \Leftrightarrow U_0 = 55 - 60$$

$$\Rightarrow U_0 = -5$$

donc (U_n) suite arithmétique de raison $r=6$ et de 1^{er} terme $U_0 = -5$

$$\begin{aligned} b / \quad S &= \underset{U_{10}}{55} + 61 + 67 + \dots + \underset{U_{25}}{145} = (25 - 10 + 1) \cdot \frac{U_{10} + U_{25}}{2} \\ &= 16 \times \frac{55 + 145}{2} \\ &= 1600 \end{aligned}$$

$$2^\circ / V_n = \frac{1}{2}(U_{n+1}) + n$$

$$a/ U_{n+1} - V_n = \left[\frac{1}{2}(U_{n+1} + 1) + n + 1 \right] - \left[\frac{1}{2}(U_{n+1}) + n \right]$$

$$= \frac{1}{2}U_{n+1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{n} + 1 - \frac{1}{2}U_{n+1} - \cancel{n}$$

$$= \frac{1}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(U_{n+1} - U_{n+1}) + 1$$

b/ on sait que (U_n) suite arithmétique de raison $r = 6$
 donc $U_{n+1} - U_n = 6$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(U_{n+1} - U_n) + 1 = \frac{1}{2} \times 6 + 1 = 4$$

donc (V_n) suite arithmétique de raison $r' = 4$

et de 1^{er} terme $V_0 = \frac{1}{2}(U_0 + 1) + 0 = \frac{1}{2}(-5 + 1) = -2$

$$c/ V_n = V_0 + n \cdot r \Leftrightarrow V_n = -2 + 4n$$

$$3^\circ / S_n = V_n + V_{n+1} + \dots + V_{2n+5}$$

$$S_{10} = V_{10} + V_{11} + \dots + V_{25} = (25 - 10 + 1) \cdot \frac{V_{10} + V_{25}}{2}$$

$$= 16 \cdot \frac{V_{10} + V_{25}}{2} \quad ; \quad \begin{aligned} V_{10} &= -2 + 4 \times 10 = 38 \\ V_{25} &= -2 + 4 \times 25 = 98 \end{aligned}$$

$$= 16 \cdot \frac{38 + 98}{2}$$

$$= 1088$$

Ex3 homothétie

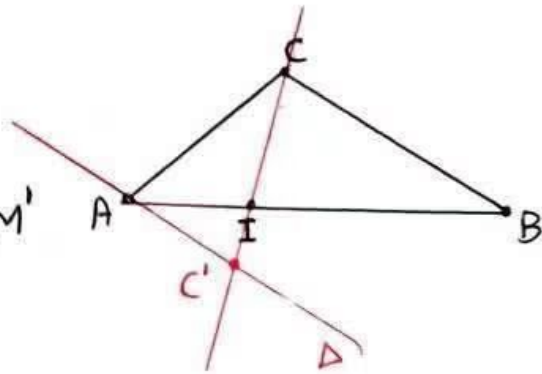
$$AB = 2AC$$

$$I \text{ bary}(A, 2)(B, 1)$$

$$h: P \longrightarrow P'$$

$$M \longrightarrow M'$$

$$\text{tel que } 2\vec{M'A} + \vec{MB} = \vec{0}$$



$$1^o/a/ \text{ car } h(M) = M' \text{ et } h(B) = M'$$

$$\text{Alors } h(B) = 2\vec{M'A} + \vec{BB} = \vec{0}$$

$$2\vec{M'A} = \vec{0}$$

$$\text{donc } M' = A$$

$$\Rightarrow h(B) = A$$

b/ Si h admet un point invariant M Alors $h(M) = M$

$$h(M) = M \Leftrightarrow 2\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0} \text{ or } I \text{ bary}(A, 2)(B, 1)$$

$$\text{donc } 2\vec{MI} + 2\vec{IA} + \vec{MI} + \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{MI} + 2\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\vec{MI} = \vec{0} \Leftrightarrow M = I \text{ donc } M \text{ admet}$$

Un point invariant ce point est I

$$c) 2\vec{M'A} + \vec{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MI} + 2\vec{IA} + \vec{MI} + \vec{IB} = \vec{0}$$

$$2\vec{MI} + \vec{MI} + 2\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MI} + \vec{MI} = \vec{0}$$

$$2\vec{MI} = -\vec{MI} \Leftrightarrow -2\vec{MI} = \vec{MI} \Leftrightarrow \vec{MI} = -\frac{1}{2}\vec{MI}$$

donc h : homothétie de centre I et de rapport $k = -\frac{1}{2}$

2°/a/ $B \in (BC)$ et $h(B) = A$ donc $h((BC)) =$ droite qui passe par A

$$\text{et } h^{-1}(A) = B$$

$$b) C = (CI) \cap (BC) \Rightarrow h(C) = h((CI)) \cap h((BC)) = (CI) \cap AD = C'$$

$$\text{Rq } h((CI)) = (CI) \text{ car } I \in (CI)$$