

Exercice n°1 : (8pts)

On considère les fonctions f , g et h suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x}{x+1}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -\frac{2}{x+1}$$

et

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x}{|x|-1}$$

C_f , C_g et C_h désignent leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé

$$R = (O, \vec{i}, \vec{j})$$

1) Etudier les variations de g et tracer C_g

2) a- Montrer en justifiant que sur $] -\infty, 0]$ la courbe de h se déduit de C_g par une translation suivie d'une symétrie orthogonale.

b- Montrer que h est impaire

c- Tracer C_h la courbe de h à partir de C_g dans le repère R

3) a- Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on a : $f(x) = 2 + g(x)$

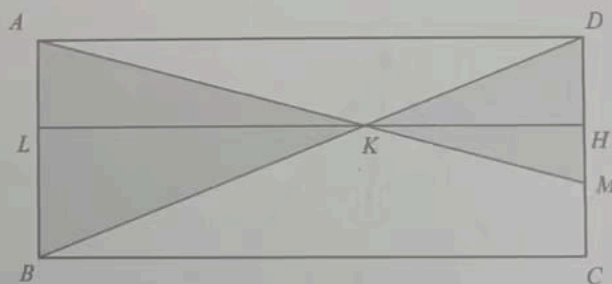
b- Tracer alors la courbe C_f à partir de C_g

4) Construire la droite Δ d'équation : $y = x - 3$. Placer un réel $a \in]0, +\infty[$ sur l'axe des abscisses. A partir de C_g et la droite Δ donner une méthode de construction sur l'axe des ordonnées de $f\left(\frac{3a+1}{a+1}\right)$.

5) Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 1$ et $AD = 2$.

Soit M un point du segment $[DC]$. On pose $DM = x$.

Le segment $[AM]$ coupe la diagonale $[BD]$ en un point K . Le point K se projette orthogonalement en H sur la droite (DC) et en L sur la droite (AB) (inutile de refaire la figure). On pose $KH = h$.



a- Montrer que $h = f(x)$.

b- Déterminer alors la valeur de x pour laquelle h soit maximale.

Exercice n°2 : (8pts)

Soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan

On considère le point $E(1, -2)$ la droite Δ d'équation : $y = -x - 1$

1) a- Déterminer l'équation réduite de Δ' la perpendiculaire à Δ passant par E

b- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Δ' et l'axe $(O, \vec{i})$

2) Soit le point $I(3, 0)$ et C le cercle de centre I et de rayon $2\sqrt{2}$

a- Montrer que Δ est tangente à C

b- Déterminer une équation cartésienne de C

3) On considère le point $F(3, -4)$

a- Vérifier que F est à l'extérieur de C

b- Soit la droite $T : y = x - 7$.

Montrer que T est l'une des deux tangentes à C passant par F . Quelle est l'autre tangente ?

Exercice n°3 : (4pts)

$ABCD$ est un tétraèdre.

I est le milieu de $[AB]$,

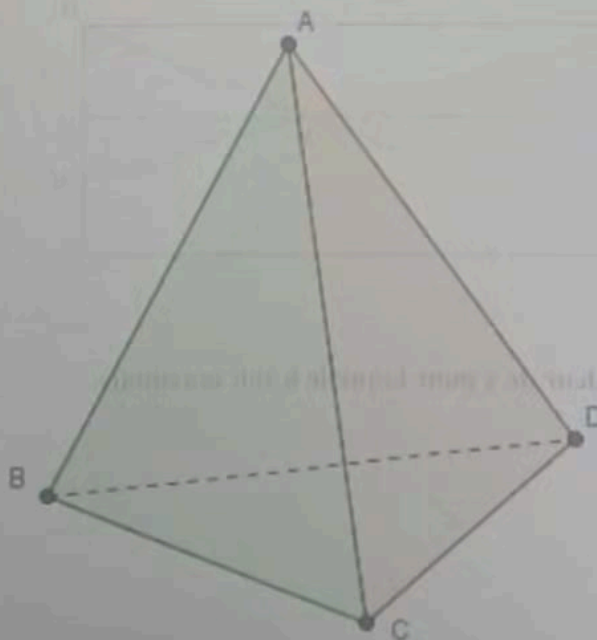
J est le milieu de $[AC]$,

K est le milieu de $[AD]$,

M est le milieu de $[BD]$,

N est le milieu de $[CD]$.

1. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (IJK) .
2. Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.
3. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD) .
4. Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.



$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{2}{x+1}$$

$$1) D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

soit a et b des réels de $]-\infty, -1[$.
 $a < b < -1$.

$$a+1 < b+1 < 0.$$

$$\frac{1}{a+1} > \frac{1}{b+1} \Rightarrow g \text{ strictement croissante sur }]-\infty, -1[.$$

$$-\frac{2}{a+1} < -\frac{2}{b+1}$$

$$g(a) < g(b)$$

donc g est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$.
 car g est une hyperbole de centre de symétrie $I(-1, 0)$.
 et d'asymptotes $\Delta_1: x = -1$ asymptote verticale.
 $\Delta_2: y = 0$ asymptote horizontale.

$$2) a) \sin \in]-\infty, 0]$$

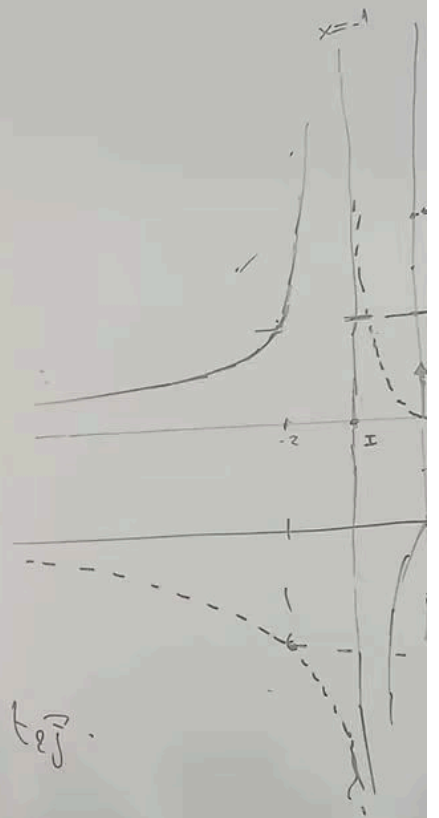
$$|x| = -x \text{ donc } h(x) = \frac{2x}{-x+1} = \frac{-2x-2+2}{x+1} = \frac{-2(x+1)}{x+1} + \frac{2}{x+1} \\ = -2 + \frac{2}{x+1} = -(2 + g(x))$$

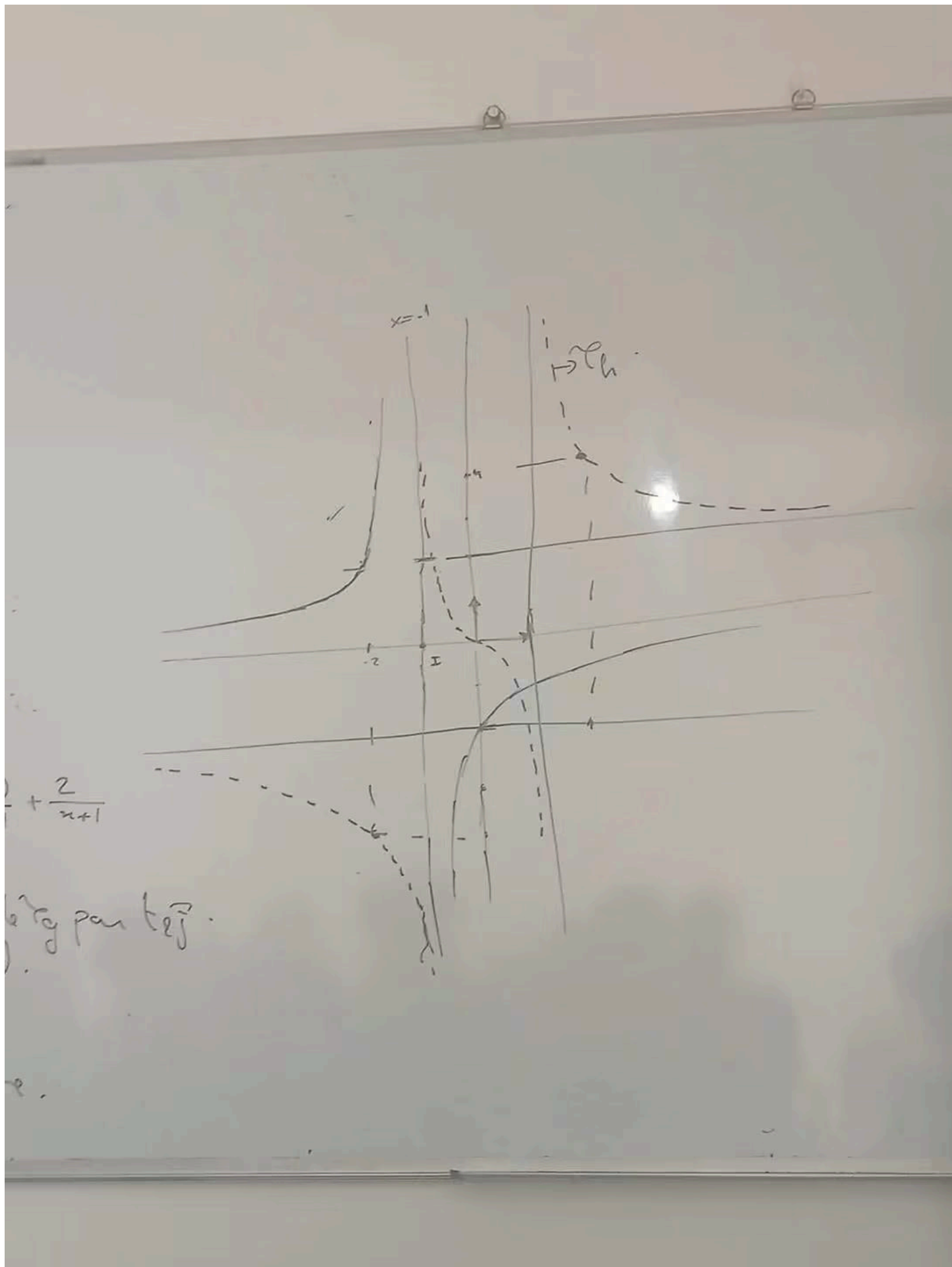
pour obtenir $D_h =]-\infty, 0]$ on fera le translate de g par $t_{\vec{e}_j}$.
 puis on fera la symétrie par rapport à $(0, \vec{i})$.

$$b) D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \quad x \in D_g, -x \in D_g.$$

$$h(-x) = \frac{-2x}{-x+1} = \frac{-2x}{|x|-1} = -h(x) \text{ d'où } h \text{ est impaire.}$$

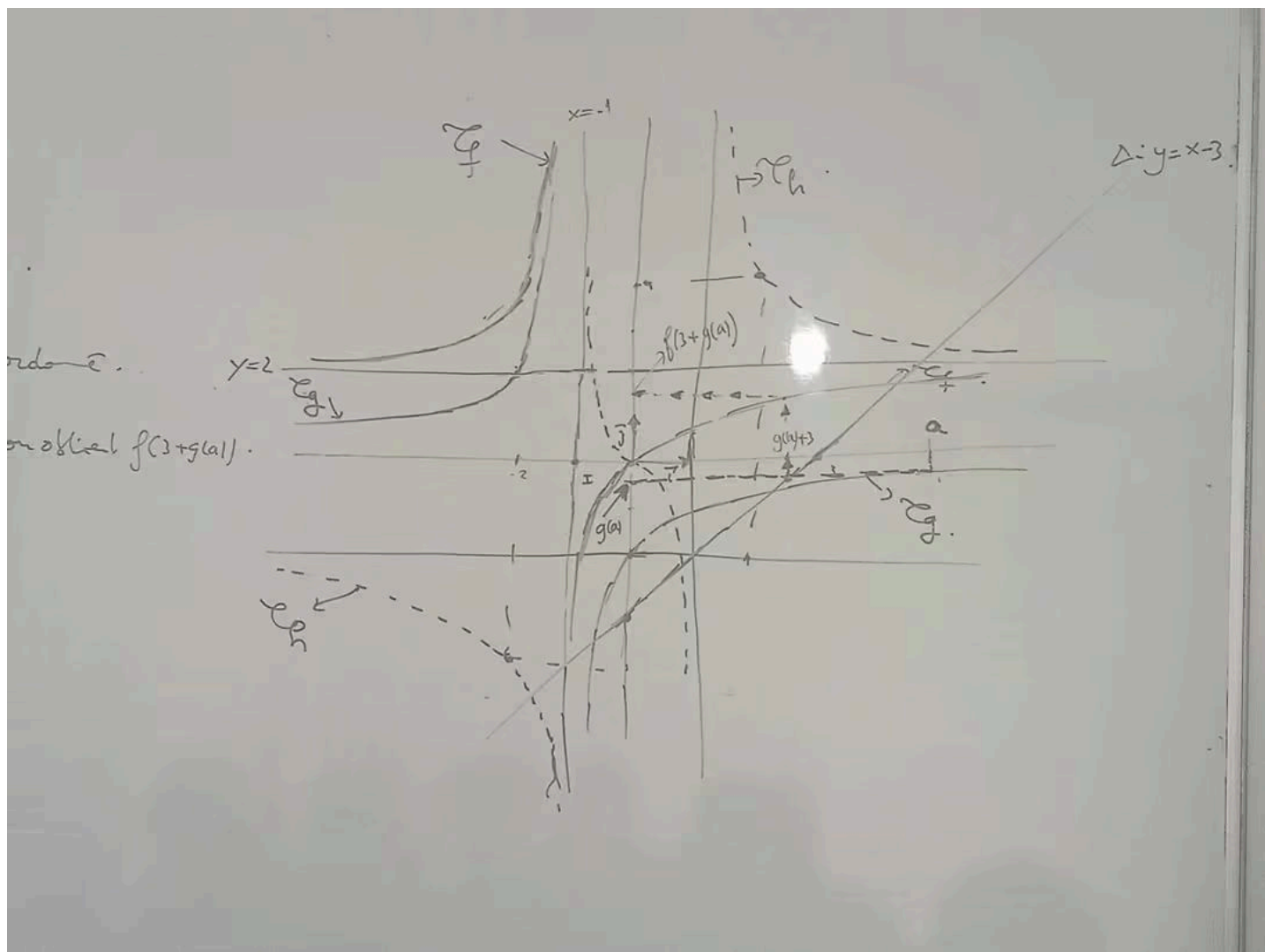
d'où D_h est symétrique par rapport à 0.





$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

Graph of $f(x)$.



$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 - \frac{2}{x+1}$$

$$1) D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

soit a et b des x réels de $]-\infty, -1[$.

$$a < b < -1.$$

$$a+1 < b+1 < 0.$$

$$\frac{1}{a+1} > \frac{1}{b+1} \Rightarrow g \text{ est strictement croissante sur }]-\infty, -1[.$$

$$-\frac{2}{a+1} < -\frac{2}{b+1}$$

$$g(a) < g(b)$$

donc g est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$.

Car g est une hyperbole de centre de symétrie $\vec{I} \in (-1, 0)$.

et d'asymptotes $\Delta_1: x = -1$ asymptote verticale.

$\Delta_2: y = 0$ asymptote horizontale.

$$2) a) \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$

$$\text{soit } x = -n \text{ donc } g(x) = \frac{2n}{-n-1} = \frac{-2n-2+2}{-n-1} = \frac{-2(n+1)}{-n-1} + \frac{2}{-n-1}$$

$$= -2 + \frac{2}{-n-1} = -(2 + g(x))$$

pour obtenir $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ on fera le translaté de g par $t \in \mathbb{R}$.

Puis on fera le symétrique par rapport à $(0, \vec{i})$.

$$b) D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \quad x \in D_g, -x \in D_g.$$

$$g(-x) = \frac{2(-x)}{-x-1} = \frac{-2x}{-x-1} = -g(x) \text{ d'où } g \text{ est impaire.}$$

d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ par rapport à 0.

$$3) a) 2 + g(x) = 2 - \frac{2}{n+1} = \frac{2n+2-2}{n+1} = \frac{2n}{n+1} = f(x).$$

$$C_f = \frac{1}{2} f^{-1}(y)$$

$$4) \Delta: y = x - 3.$$

$$f\left(\frac{3a+1}{a+1}\right) = f\left(\frac{3a+3-2}{a+1}\right)$$

$$= f(3 + g(a)).$$

$$\Delta: y = x - 3 \\ x = y + 3.$$

si $y = g(a)$, à l'ordonnée -

on projette sur Δ , $g(a)$ de l'axe des ordonnées.

on obtient sur l'abscisse $3 + g(a)$.

on fait l'image par f de $3 + g(a)$ on obtient $f(3 + g(a))$.

$$y=2$$

$$C_f$$

$$C_f$$

$$3) a) 2+g(x) = 2 - \frac{x}{n+1} = \frac{2n+2-x}{n+1} = \frac{2n}{n+1} = f(x).$$

$$C_f = \frac{1}{2} f^{-1}(y)$$

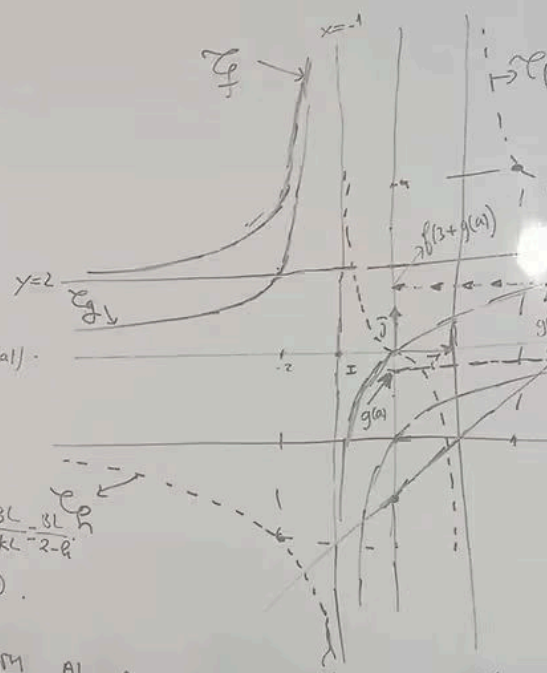
$$4) \Delta: y = n-3.$$

$$f\left(\frac{3a+1}{a+1}\right) = f\left(\frac{3a+3-2}{a+1}\right) = f(3+g(a)).$$

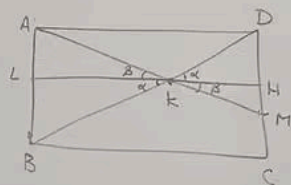
$$\Delta: y = x-3$$

$$x = y+3.$$

si $y = g(a)$, à l'ordonnée.
 on projette sur Δ , $g(a)$ de l'axe des ordonnées.
 on obtient sur la droite $3+g(a)$.
 on fait l'image par f de $3+g(a)$ on obtient $f(3+g(a))$.



5) a)



$$\tan \alpha = \frac{HD}{KH} = \frac{HD}{KL} = \frac{BL}{KL} = \frac{BL}{2-L}.$$

$$\Rightarrow \frac{HD}{L} = \frac{BL}{2-L} \quad (1)$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad \frac{HD+HM}{L} = \frac{BL+AL}{2-L}.$$

$$\Rightarrow \frac{n}{L} - \frac{1}{2-L} \quad (\Rightarrow) \quad x(2-L) = L \Rightarrow 2L = L(n+1) \Rightarrow L = \frac{2x}{n+1} = f(x).$$

$$\tan \beta = \frac{HM}{KH} = \frac{HM}{KL} = \frac{AL}{KL} = \frac{AL}{2-L}.$$

$$\Rightarrow \frac{HM}{L} = \frac{AL}{2-L} \quad (2)$$

b)

$$0 \leq x \leq 1$$

$$f(0) = f(x) \leq f(1)$$

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

exercice n°2:

Règle $\Delta: y = mx + p$ $\Delta': y = m'x + p'$

① $\Delta \parallel \Delta' \Leftrightarrow m = m'$

② $\Delta \perp \Delta' \Leftrightarrow m \cdot m' = -1$

1) a) $\Delta: y = -x - 1$ $\Delta' \perp \Delta \Leftrightarrow \Delta': y = x + p$
 $E(1, -2) \in \Delta' \Leftrightarrow -2 = 1 + p \Leftrightarrow p = -3$

donc $\Delta': y = x - 3$

b) $\Delta' \cap (0, \bar{1}): y = 0$ $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$\Delta' \cap (0, \bar{1}) = \{A'(3, 0)\}$

2) a) $I(3, 0)$ $d(I, \Delta) = \frac{|3 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ d'où Δ est tangente à $\mathcal{C}$.

b) $\mathcal{C}: (x-1)^2 + y^2 = 8$

3) a) $F(3, -4)$

$IF = \sqrt{(x_F - x_I)^2 + (y_F - y_I)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4 > 2\sqrt{2}$

F est à l'extérieur de $\mathcal{C}$.

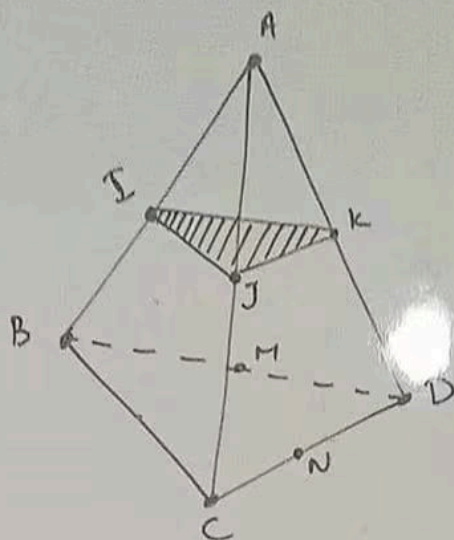
b) $T: y = x - 7$ $-4 = 3 - 7$ d'où $F \in T$.

$d(I, T) = \frac{|3 - 7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ d'où T est tangente à $\mathcal{C}$ passant par F .

$F \in \Delta$ et Δ est une des

$F \in \Delta$ et Δ une droite tangente à $\mathcal{C}$ passant par F .

EX3



① $(IJ) \subset (ABC)$ car I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$.

$(IJ) \subset (IJK)$ de même (IJK) et ABC sont deux plans distincts.
 d'où $(ABC) \cap (IJK) = (IJ)$.

② Dans le triangle (ABC) on a I est le milieu de $[AB]$ $\Rightarrow (IJ) \parallel (BC)$ ①
 J est le milieu de $[AC]$

Dans le triangle (BCD) on a M est le milieu de $[BD]$ $\Rightarrow (MN) \parallel (BC)$ ②
 N est le milieu de $[CD]$
 d'après ① et ② $(IJ) \parallel (MN)$.

③ $(IJ) \parallel (BC)$ et $(BC) \subset (BCD)$ donc $(IJ) \parallel (BCD)$.

④ $(IJ) \subset (IJK)$ $(BC) \subset (BCD)$ $(IJ) \parallel (BC) \Rightarrow (IJK) \parallel (BCD)$
 $(JK) \subset (IJK)$ $(CD) \subset (BCD)$ $(JK) \parallel (CD)$
 $(IJ) \cap (JK) = \{J\}$ $(BC) \cap (CD) = \{C\}$