

EXERCICE N°1 : (4 points)

On propose le tableau de signe suivant , du trinôme : $T(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

x	$-\infty$	-1	9	$+\infty$	
$T(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$

1) Répondre par vrai ou faux, Tout en justifiant la réponse .

a) $c < 0$.

b) $T\left(-\frac{x^2+2024}{2024}\right) > T\left(-\frac{2023}{x^2+2023}\right)$ pour tout x non nul.

c) Si α une solution de l'inéquation $ax^4 + bx^2 + c > 0$ alors $\alpha \in]-3; 3[$.

2) Sachant que $T(8)=3$

a) Montrer $T(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 3$.

EXERCICE N°2 : (6,5 points)

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

1) a) Montrer que $P(x)$ est factorisable par $(x + 1)$.

b) Factoriser $P(x)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = x^2 - 1$.

2) Soit la fonction rationnelle définie par $F(x) = \frac{P(x)}{x^3+x}$.

a) Déterminer D l'ensemble de définition de F .

b) Montrer que $F(x) = \frac{x+1}{x}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $F(x) \geq -x$.

3) a) Développer $xP(x)$.

b) En déduire que $x^4 - 1 = (x - 1)P(x)$.

c) Montrer que 2024 est divisible par 11 .

d) En déduire que $100^4 + 2023$ est divisible par 11 .

EXERCICE N°3 : (2.5 points)

1) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 202320232023 par 11 .

b) Déterminer les valeurs de chiffre u pour que le reste de la division euclidienne de l'entier naturel 513u par 11 soit égale à un nombre pair.

2) Déterminer les valeurs de l'entier naturel p pour que $p - 1$ divise $p + 11$.

EXERCICE N°4 : (7 points)

Soit ABC un triangle isocèle en A .

On désigne par :

- I le symétrique de B par rapport à C .
- J le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, -1)$.
- K le barycentre des points pondérés $(I, 1)$ et $(J, 2)$.

1) a) Construire les points I, J et K .

b) Montrer que I est le barycentre des points pondérés $(C, 2)$ et $(B, -1)$.

2) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 3)$, $(B, -1)$ et $(C, 2)$.

a) Montrer que G est le milieu de $[JC]$.

b) Montrer que K est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$, $(B, -2)$ et $(C, 2)$.

c) Déterminer l'ensemble $\xi = \left\{ M \in \mathcal{P} \text{ tel que } \|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \frac{3}{2} \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MI}\| \right\}$.

3) Soit l'application f définie par $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M \mapsto M' \text{ tel que } 3\overrightarrow{M'A} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$$

a) Montrer que f est une translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

b) Montrer que $f(A) = K$.

4) Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et $\mathcal{C}'$ son image par f .

$\mathcal{C}'$ coupe la droite (BC) en E et F tel que $E \in [BC]$.

a) Montrer que $f(C) = F$ et $f(B) = E$.

b) Soient Δ_1 la parallèle à (BK) passant par E et Δ_2 la parallèle à (CK) passant par F . Δ_1 et Δ_2 se coupent en H .

- Montrer que K est le milieu de $[AH]$.

5) On suppose que B et C sont fixes et A est variable.

Quel est l'ensemble des points K lorsque A varie ?

EXERCICE N°1

1) a) Faux

Justification possible : $\frac{c}{a} = -1 \times 9 < 0$ alors a et c sont de signes opposés et comme $a < 0$ (d'après le tableau) alors $c > 0$.

b) Faux

Justification possible

- $x^2 + 2024 > 2024$ Pour tout x réel non nul Alors $\frac{x^2+2024}{2024} > 1$
alors $-\frac{x^2+2024}{2024} < -1$ Alors $T\left(-\frac{x^2+2024}{2024}\right) < 0$.
 - $x^2 + 2023 > 2023$ Alors $0 < \frac{2023}{x^2+2023} < 1$ Alors $-1 < -\frac{2023}{x^2+2023} < 0$ Alors
 $T\left(-\frac{2023}{x^2+2023}\right) > 0$ Ainsi $T\left(-\frac{x^2+2024}{2024}\right) < T\left(-\frac{2023}{x^2+2023}\right)$.
- c) $aa^4 + ba^2 + c > 0$ Alors $a^2 \in]-1; 9[$ Or $a^2 \geq 0$ Alors $0 \leq a^2 < 9$ Alors
 $0 < \sqrt{a^2} < \sqrt{9}$ Alors $0 < |a| < 3$ Alors $a \in]-3; 3[$.

2)

- $T(x) = a(x+1)(x-9)$
 - $T(8) = 3$ Alors $a(8+1)(8-9) = 3$ Alors $-9a = 3$ Alors $a = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$.
- D'où $T(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 8x - 9) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 3$.

EXERCICE N°2

1) a) $P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$ Alors (-1) une racine de P d'où $P(x)$ est factorisable par $(x+1)$.

b) $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$.

c) $P(x) = x^2 - 1$ signifie $(x+1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)$

signifie $(x+1)(x^2+1) - (x-1)(x+1) = 0$ signifie $(x+1)((x^2+1) - (x-1)) = 0$

signifie $(x+1)(x^2+x+2) = 0$ signifie $x+1 = 0$ ou $x^2+x+2 = 0$

- $x+1 = 0$ signifie $x = -1$.
- $x^2+x+2 = 0$, $\Delta = 1 - 4 \times 2 = -7 < 0$.

$$S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$$

2) F est définie ssi $x^3 + x \neq 0$ ssi $x(x^2+1) \neq 0$.

- $x^2+1 \geq 1$ alors $x^2+1 \neq 0$ pour tout réel x .

D'où F est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $F(x) = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x(x^2+1)} = \frac{x+1}{x}$.

c) $F(x) \geq -x$ cette inéquation existe ssi $x \in \mathbb{R}^*$

Dans $\mathbb{R}^*$ on a

$F(x) \geq -x$ signifie $\frac{x+1}{x} + x \geq 0$ signifie $\frac{x^2+x+1}{x} \geq 0$.

- $x^2 + x + 1 = 0$, $\Delta = -3 < 0$.
- $S_{\mathbb{R}} = [0 ; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x^2 + x + 1$	+	+	+
x	-	○	+
$\frac{x^2 + x + 1}{x}$	-	+	+

3) a) $xP(x) = x(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x$

b) $xP(x) = x^4 + \frac{x^3 + x^2 + x}{=P(x)-1} = x^4 + P(x) - 1$ signifie

$x^4 - 1 = xP(x) - P(x) = (x - 1)P(x)$

c) $d = 4 - 2 + 0 - 2 = 0$ on a d est divisible par 11 alors 11 divise 2024 .

d) On a $100^4 + 2023 = 100^4 - 1 + 2024 = (100 - 1)P(100) + 2024 = 99P(100) + 2024$
On 11/99 alors 11/(99P(100)) et comme 11/2024 alors 11/(99P(100)+2024) d'où
11 / (100⁴ + 2023) .

EXERCICE N°3

1)a) $d = 3(3 - 2 + 0 - 2) = -3$ on a $-3 + 11 = 8$ alors le reste de la division euclidienne de 202320232023 par 11 est égal à 8 .

b)

u	$d = u - 7$	$d + m = d + 11$	Le reste
0	-7	4	4
1	-6	5	5
2	-5	6	6
3	-4	7	7
4	-3	8	8
5	-2	9	9
6	-1	10	10
7	0		0
8	1		1
9	2		2

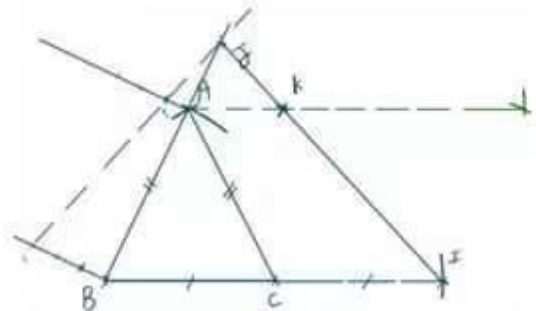
D'après le tableau les valeurs de chiffre u pour que le reste de la division euclidienne de l'entier 513u par 11 soit égale à un nombre pair sont 0, 2, 4, 7, 9 .

c) $p - 1$ divise $p + 11$ alors il existe un entier naturel k tel que $(p + 11) = k(p - 1)$
alors $(p - 1) + 12 = k(p - 1)$ alors $12 = k(p - 1) - (p - 1) = (k - 1)(p - 1)$
alors $p - 1$ divise 12
alors $(p - 1) \in D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ alors
 $p \in \{2; 3; 4; 5; 7; 13\}$.

EXERCICE N°4

1)a)

b) on a I le symétrie de B par rapport à C signifie C le milieu de $[BI]$ signifie $\overline{IB} = 2\overline{IC}$



2) a) G le barycentre des points pondérés $(A,3)$, $(B,-1)$ et $(C,2)$ signifie

$$=(3-1)\overline{G}f \text{ car } f = \text{bary}[(A,3) \text{ et } (B,-1)]$$

b) On a : $3\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 3\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC}$

Car J le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, -1)$ et I le barycentre des points pondérés $(C, 2)$ et $(B, -1)$

 $et (C, 2)$

signifie $\|(3 - 2 + 2)\overline{MK}\| = \frac{3}{2}\|\overline{2MC}\|$ *signifie* $3MK = 3MC$ *signifie* $MK = MC$ *signifie*

d'où ξ est la médiatrice du segment $[KC]$.

signifie $3\overrightarrow{M'A} - 3\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{CM}$

signifie $3(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM}) = 2(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB})$ signifie

$3\overrightarrow{M'M} = 2\overrightarrow{CB}$ signifie $\overrightarrow{MM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ par suite f est une translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$3\overrightarrow{AK} = 2(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KC}) \text{ signifie } \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \text{ signifie}$$

$$f(A) = K.$$

4) a) On a : $C \in (BC) \cap \mathcal{E}$ et f est une translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

alors $f(C) \in f((BC)) \cap f(\mathcal{C})$

alors $f(C) \in (BC) \cap \mathcal{E}'$

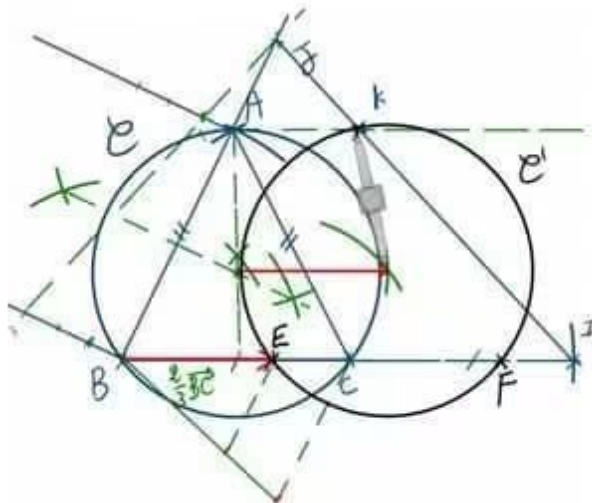
alors $f(C) \in [E; F]$

- On a : $E \in [BC]$ alors $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont de sens contraires

- Si $f(C) = E$ alors $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

alors $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens. (Absurde car $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont de sens contraires)

par suite $f(C) \neq E$ d'où $f(C) = F$



On a : $B \in (BC) \cap \mathcal{C}$ et f est une translation de vecteur $\frac{2}{3}\overline{BC}$

alors $f(B) \in f((BC)) \cap f(\mathcal{C})$

alors $f(B) \in (BC) \cap \mathcal{C}'$

alors $f(B) \in [E; F]$

- On a $B \neq C$ alors $f(B) \neq f(C)$ alors $f(B) \neq F$ par suite $f(B) = E$

b) On a $\{K\} = (BK) \cap (CK)$ et f est une translation de vecteur $\frac{2}{3}\overline{BC}$

alors $\{f(K)\} = f((BK)) \cap f((CK)) = \Delta_1 \cap \Delta_2 = \{H\}$

en effet

- $\left. \begin{array}{l} f(B) = E \\ E \in \Delta_1 \\ (BK) // \Delta_1 \end{array} \right\} \text{ alors } f((BK)) = \Delta_1$
- $\left. \begin{array}{l} f(C) = F \\ F \in \Delta_2 \\ (CK) // \Delta_2 \end{array} \right\} \text{ alors } f((CK)) = \Delta_2$

D'où $f(K) = H$

- ✓ On a f est une translation

$$\left. \begin{array}{l} f(A) = K \\ f(K) = H \end{array} \right\} \text{ alors } \overline{AK} =$$

$\overline{KH}$ alors K le milieu du segment $[AH]$.

5) On a ABC un triangle isocèle en A alors $AB = AC$ alors lorsque le point A varie il décrit la médiatrice du segment $[BC]$ comme $f(A) = K$ alors K décrit la médiatrice du segment $f([BC]) = [EF]$ lorsque A varie.

