

Lycée : mhamdiya 1
 Prof : Mensi Sihem
 Section : 2Info 2 & 3

Devoir de synthèse N° 2 Mathématique

Année secondaire : 2022 -2023
 Date : 16 - 03 - 2023
 Durée : 2 h

Exercice N°1 : 4p

Répondre par « vrai » ou « faux ».

1/ soient $U_0 = 3$; $U_1 = -2$ et $U_2 = \frac{1}{3} \cdot U_0$; U_0 ; U_1 et U_2 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

2/ soient $U_0 = 3$; $U_1 = 6$ et $U_2 = 9 \cdot U_0$; U_0 ; U_1 et U_2 sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

3/ $(1 + \cot^2(x)) = \frac{1}{\sin^2(x)}$.

4/ soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et tel que $(\tan x)^2 = 8$ alors $\cos x = 2$.

Exercice N°2 : 5p

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que ; $U_4 = 5$ et $U_9 = 15$

1) a) Déterminer la raison r et le premier terme U_0 de cette suite

b) vérifier que pour tout entier n ; $U_n = 2n - 3$

c) Exprimer en fonction de n la somme : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = n + U_n$

a) Montrer que V est une suite arithmétique de raison 3 préciser son premier terme

V_0

b) Exprimer V_n en fonction de n

c) calculer la somme : $S'_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{15}$

Exercice N°3 : 5 p

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3n + 3 \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2

2) Justifier que la suite (U_n) n'est pas géométrique

3) Soit V est une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n - 3n$

a) montrer que V_n est une suite géométrique de raison 2 préciser son premier terme

V_0

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

4) a) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$

b) Déterminer la valeur de n pour que $S_n = 127$

Exercice N° 4 : 6p

I : Soit $x \in [0 ; \pi]$ et soit la fonction définie par :

$$f(x) = -2 \cos^2(x) - 3 \sin(x) + 3$$

- 1) Calculer $f(0)$, $f(\frac{\pi}{2})$ et $f(\frac{\pi}{3})$
- 2) Montrer que : $f(\pi - x) = f(x)$
- 3) a/ Montrer que : $f(x) = 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1$
b/ Résoudre dans $[0, \pi]$; l'équation $f(x) = 0$
- 4) On pose $g(x) = -2 \sin^2 x + 3 \sin(\pi - x)$
montrer que $f(x) + g(x)$ est une constante dont déterminera sa valeur

bon chance

sihem mensi

1/ $\frac{U_1}{U_0} = \frac{-2}{3}$
 $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{-2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ } $\neq$ donc U_n n'est pas suite géométrique. Faux (N)

2/ $U_1 - U_0 = 6 - 3 = 3$
 $U_2 - U_1 = 9 - 6 = 3$ } donc U_n est une suite arithmétique Vrai (N)

3/ $1 + \cot^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$ Vrai (N)

4/ $(\tan x)^2 = 8 \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + 8} = \frac{1}{9}$
 $\cos^2 x = \frac{1}{9} \neq 2$ Faux (N)

Exercice N°2

$U_4 = 5$ et $U_9 = 15$

a/ $U_n = U_p + (n - p) \times r$

$r = \frac{U_n - U_p}{n - p} = \frac{U_9 - U_4}{9 - 4} = \frac{15 - 5}{5} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \boxed{r = 2}$ (N)

$U_4 = U_0 + (4 - 0) \times r$

$U_0 = U_4 - 4 \times 2 = 5 - 8 = -3 \Rightarrow \boxed{U_0 = -3}$

b/ $U_n = U_0 + n \times r = -3 + 2n \Rightarrow \boxed{U_n = 2n - 3}$ (N)

c/ $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$= \frac{n - 0 + 1}{2} (U_0 + U_n) = \frac{n + 1}{2} (-3 + 2n - 3)$

$= \frac{n + 1}{2} (2n - 6) = \frac{2(n + 1)(n - 3)}{2} = (n + 1)(n - 3)$

$\boxed{S_n = (n + 1)(n - 3)}$ q.f.v.
 ou $S_n = n^2 - 2n - 3$

$$2/ \quad V_n = n + U_n$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= n+1 + U_{n+1} = n+1 + 2(n+1) - 3 \\ &= n+1 + 2n+2 - 3 \\ &= 3n+3 - 3 \\ &= 3n \end{aligned}$$

$$V_{n+1} - V_n = 3n - n - U_n = 2n - 2n + 3 = 3$$

donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$

$$V_0 = 0 + U_0 \Leftrightarrow \boxed{V_0 = -3}$$

$$V_n = V_0 + nr = -3 + 3n = 3(n-1)$$

$$\boxed{V_n = 3(n-1)}$$

$$V_{15} = 3(15-1) = 3 \times 14 = 42$$

$$c/ \quad S_n' = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{15}$$

$$= \frac{15-0+1}{2} (V_0 + V_{15}) = \frac{16}{2} (-3 + 42)$$

$$= \frac{16}{2} \times (39) = \frac{624}{2} = 312$$

$$\boxed{S_n' = 312}$$

Exercice n°3

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3n + 3 \end{cases}$$

$$1/ \quad U_1 = 2U_0 - 3 \times 0 + 3 = 2 + 3 = 5 \quad \boxed{U_1 = 5}$$

$$U_2 = 2U_1 - 3 \times 1 + 3 = 2 \times 5 = 10 \quad \boxed{U_2 = 10}$$

$$2/ \quad \frac{U_1}{U_0} = \frac{5}{1} = 5 \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$$

donc U_n n'est pas géométrique o, 7f

3/ $V_n = U_n - 3n$.

q/ $V_{n+1} = U_{n+1} - 3(n+1) = 2U_n - 3n - 3 - 3n - 3$
 $= 2U_n - 6n - 3$
 $= 2(U_n - 3n)$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2(U_n - 3n)}{U_n - 3n} = 2.$$

donc V_n est une suite géométrique de

raison $q = 2$ 1

* $V_0 = U_0 - 3 \times 0 = 1$.

b/ $V_n = V_0 \times q^n = 1 \times 2^n = 2^n \Rightarrow \boxed{V_n = 2^n}$ o, 6

$V_n = U_n - 3n \Rightarrow U_n = V_n + 3n$
 $\boxed{U_n = 2^n + 3n}$ o, 5

4/ a/ $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$
 $= V_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 1 \times \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \right) = -1 + 2^{n+1}$
 $\boxed{S_n = 2^{n+1} - 1}$ o, 7f

$2^{n+1} = 2^7$

b/ $S_n = 127$
 $2^{n+1} - 1 = 127$

$n+1 = 7 \Rightarrow n = 7 - 1$

$\boxed{n = 6}$

$2^{n+1} = 127 + 1$

$2^{n+1} = 128$

Exercice n°21

$$f(x) = -2\cos^2 x - 3\sin x + 3.$$

$$1/ f(0) = -2\cos^2 0 - 3\sin 0 + 3 = -2 \times 1^2 - 3 \times 0 + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\cos^2 \frac{\pi}{2} - 3\sin \frac{\pi}{2} + 3 = -2 \times 0 - 3 \times 1 + 3 = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\cos^2 \frac{\pi}{3} - 3\sin \frac{\pi}{3} + 3 =$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 =$$

$$= -\frac{2}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3$$

$$= -\frac{1-3\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{2} = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}}$$

$$2/ f(\pi-x) = -2\cos^2(\pi-x) - 3\sin(\pi-x) + 3$$

$$= -2(\cos x)^2 - 3\sin x + 3$$

$$= -2\cos^2 x - 3\sin x + 3$$

$$\boxed{f(\pi-x) = f(x)}$$

$$3/4 f(x) = -2(1-\sin^2 x) - 3\sin x + 3$$

$$= -2 + 2\sin^2 x - 3\sin x + 3$$

$$\boxed{f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$$

$$b/ f(x) = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$a a + b + c = 0$$

$$x' = 1 \quad \sin x = 1$$

$$x'' = \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$S[0, \pi] = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \right\}$$

$$4/ f(x) + g(x) =$$

$$= 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 - 2\sin^2 x + 3\sin(\pi-x)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x$$

$$= 1$$

$$\text{donc } \boxed{f(x) + g(x) = 1} \quad \forall x$$

Exercice n°1 : (9pts)

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$. Déduire l'intersection de C_f avec les deux axes du repère

2°) a) Etudier les variations de f sur $]-\infty, 2]$ et $[2, +\infty[$.

b) Tracer C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3°) Soit g la fonction définie par : $g(x) = 2x - 2$.

a) Montrer que Δ_g coupe C_f en deux points distincts M et N que l'on déterminera.

b) Tracer Δ_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Calculer les coordonnées de H projeté orthogonal de O sur la droite (MN) puis calculer l'aire du triangle OMN .

4°) Soient P et Q deux points de même abscisse $x \in [0, 3]$ tel que $P \in (O, \vec{i})$ et $Q \in C_f$. On désigne par $A(x)$ l'aire du triangle OPQ .

Montrer que $A(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x$.

II) On considère la fonction h définie par : $h(x) = x^2 + 4|x| - 1$.

1°) Vérifier que h est une fonction paire.

2°) Déduire le tracé de C_h à partir de C_f dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

« Donner une explication de construction de C_h ».

3°) Résoudre graphiquement l'équation $h(x) = 0$.

Exercice n°2 : (5pts)

On considère la suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_3 = 3$ et $u_{11} = 11$

1°) a) Déterminer le terme général de (u_n) .

b) Calculer $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ en fonction de n .

2°) a) Montrer que $(u_{n+1})^3 = (u_n)^3 + 3(u_n)^2 + 3u_n + 1$.

b) En déduire que $(u_1)^2 + (u_2)^2 + \dots + (u_n)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) Calculer $S_n' = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ en fonction de n .

3°) Soit v_n la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$; ($n \in \mathbb{N}$)

Exprimer v_n en fonction de n et déduire $S_n'' = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ en fonction de n .

4°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n+2}} + \dots + \frac{1}{u_{2n}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} - \dots + \frac{1}{u_{2n-1}} - \frac{1}{u_{2n}}.$$

Exercice n°3 : (6pts)

Soit M le point du demi-cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre $[AA']$ où $A(1,0)$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\widehat{AOM} = \alpha$.

Où $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Soit N et M' deux points de $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{MON} = \beta$.

Avec $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\widehat{MOM'} = \frac{\pi}{2}$. Soit $\mathcal{R}'$ le repère orthonormé définie par

$$\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$$

1°) Montrer que $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha)$ et $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$.

2°) a) Déterminer les coordonnées de M et M' dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Déterminer les coordonnées de N en fonction de α et β dans le repère $\mathcal{R}'$ puis dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Dédire les relations trigonométriques

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha).$$

d) Dédire en fonction de α $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$.

e) Calculer $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$.

3°) Soit f la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Par $f(x) = \sin(2x) - \frac{3}{2}$

Déterminer $f(\alpha)$ sachant que $\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = 0,7$



Exercice 12



Donnée
et cherché

$$P(x, y)$$

$$\frac{x}{r} = \cos \theta, \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

$$P(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$P'(x', y') = (r' \cos \theta', r' \sin \theta')$$

$$P''(x'', y'') = (r'' \cos \theta'', r'' \sin \theta'')$$

$$P'''(x''', y''') = (r''' \cos \theta''', r''' \sin \theta''')$$

$$R(0, 1, 2) \quad R'(0, 0, 0)$$

Après simplification

Condition de la dérivée (1) :

$$\frac{d}{dt} (x, y, z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (v_x, v_y, v_z)$$

Condition de la dérivée (2) :

$$v_x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - \sin \theta \frac{d\phi}{dt}$$

$$\text{et } \frac{dy}{dt} = \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (x, y, z) = \left(\cos \theta \frac{d\theta}{dt} - \sin \theta \frac{d\phi}{dt}, \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \frac{d\phi}{dt}, \frac{dr}{dt} \right)$$

$$= \left(\cos \theta \frac{d\theta}{dt} - \sin \theta \frac{d\phi}{dt}, \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \frac{d\phi}{dt}, \frac{dr}{dt} \right) \quad (2)$$

D'après (1) et (2) la condition de

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \quad \sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Forme

Formule d'addition de la fonction trigonométrique

$$\sin(x \pm y) = \frac{\sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)}{\cos(x) \cos(y) \pm \sin(x) \sin(y)}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

$$\frac{\sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)}{\cos(x) \cos(y) \pm \sin(x) \sin(y)}$$

Formules de duplication

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$= 2\cos^2(x) - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x) \cos(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4}$$

$$3) \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{1 - \sin(x)}$$

$$\cos(x) - \sin(x) = 0,7$$

$$\Rightarrow (\cos(x) - \sin(x))^2 = 0,49$$

$$\Rightarrow \cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \sin^2(x) = 0,49$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) - 0,49$$

$$= 0,51$$

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{1 - \sin(x)} = 0,7 - \frac{1}{2} = -0,15$$

EX 2:

1) a) $u_1 = 3$ et $u_n = 4n$

$$r = \frac{u_n - u_{n-1}}{n-1} = 4$$

$$u_n = u_1 + (n-1)r = 4n - 1$$

b) $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} = \frac{(3 + 4n)n}{2} = \frac{n^2 + 7n}{2}$

2) a) $u_{n+1}^2 = (u_n + 1)^2$
 $= u_n^2 + 2u_n + 1$

b) $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$? on pose $S = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 3u_n^2 + 2u_n + 1$$

$$u_1^2 - u_0^2 = 3u_0^2 + 2u_0 + 1$$

$$u_2^2 - u_1^2 = 3u_1^2 + 2u_1 + 1$$

$$\vdots$$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 3u_n^2 + 2u_n + 1$$

$$u_{n+1}^2 - u_1^2 = 3S + 2u_n + n$$

En additionnant
 tous les termes

$$3S = (n+1)^2 - 1 - 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n$$

$$3S = (n+1) \cdot \frac{(2(n+1)^2 - 2 - 3n - 2n)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n - 2n)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S'_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

$$= \left(\frac{1^2}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2^2}{6} + \frac{2}{6}\right) + \dots + \frac{n^2}{6} + \frac{n}{6}$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{6} + \frac{1 + 2 + \dots + n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+3)}{12}$$