

Epreuve : MATHEMATIQUES	Devoir de synthèse N°1 *****	Commissariat régional Tunis 1
14 Décembre 2023	Sujet commun	Niveau : 1^{ère} Année Tronc Commun
	Durée : 1 h 30	

Le sujet comporte 3 pages dont l'annexe page 3 est à rendre avec la copie.

Exercice N°1: (6 points)

Les questions 1) , 2) et 3) sont indépendantes.

1) Soit l'expression $A(x) = x^2 + 2x - 8$

a) Vérifier que $A(x) = (x + 1)^2 - 9$

b) Factoriser alors $A(x)$.

c) Calculer $A(-1)$.

2) On donne les expressions : $E = x^3 - 27 - (x - 3)(x + 1)^2$ et $F = (x + 3)^3 - (x - 3)^3$

a) Factoriser E

b) Montrer que $F = 18(x^2 + 3)$

c) En déduire que le nombre $N = 2024^3 - 2018^3$ est divisible par 6.

3) Soient $a = 2\sqrt{45} - \sqrt{125} + 2$ et $b = 2\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1) + 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 4\right)$

a) Montrer que $a = 2 + \sqrt{5}$ et $b = 2 - \sqrt{5}$

b) Vérifier que $ab = -1$

c) Montrer alors que $\frac{(a^{-2}b)^2 a^5}{a^{-3}b^{-2}} = 1$

Exercice N°2: (2 points)

1) Soit x un réel tel que : $0 < x < 1$

a) Montrer que $x^2 < x$

b) En déduire que $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x^2+1}$.

2) Montrer que pour tous réels positifs a, b et c on a :

$$(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b \geq 6abc$$

Exercice N°3: (3,5 points)

Soit $(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de diamètre [AB].

M est un point de $(\mathcal{C})$ tel que $\widehat{ABM} = 40^\circ$

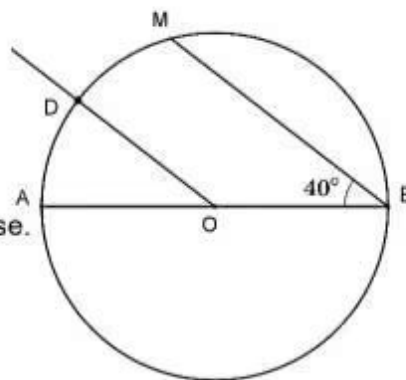
Les droites (OD) et (BM) sont parallèles.

1) a) Quel est la nature du triangle AMB ? Justifier votre réponse.

b) Calculer $\widehat{BAM}$.

2) a) Montrer que $\widehat{AOD} = 40^\circ$.

b) Montrer [BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABM}$

**Exercice N°4: (4,5 points)**

On donne le triangle ABC en annexe (Figure 1).

1) Construire dans la figure 1, les points I de [AB] et J de [AC] tels que :

$$AI = \frac{1}{3} AB \text{ et } CJ = \frac{2}{3} AC.$$

2) a) Comparer les rapports $\frac{AI}{AB}$ et $\frac{AJ}{AC}$.

b) En déduire que les droites (BC) et (IJ) sont parallèles.

3) Les droites (BJ) et (CI) se coupent en O.

a) Montrer que le rapport $\frac{OI}{OC} = \frac{1}{3}$.

b) En déduire $CI = 4OI$.

4) a) La droite parallèle à (BC) passant par O coupe la droite (AB) en M et la droite (AC) en N.

$$\text{Montrer que } \frac{BM}{BI} = \frac{BO}{BJ} \text{ et } \frac{CN}{CJ} = \frac{CO}{CI}.$$

b) Montrer que le point O est le milieu de [MN].

Exercice N°5: (4 points)

L'exercice est proposé en annexe à rendre avec la copie.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

Cocher la bonne réponse.

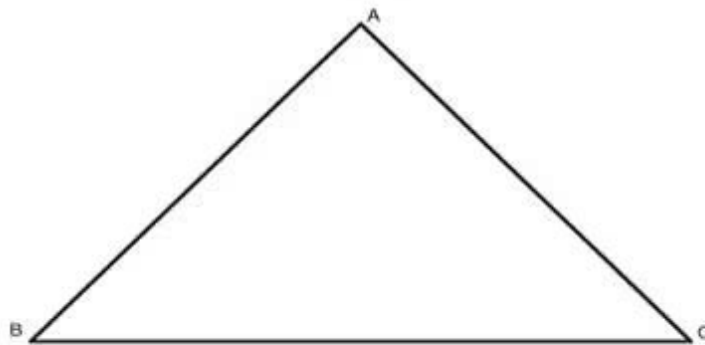
Aucune justification n'est demandée.

Annexe à rendre avec la copie

Nom Prénom Classe : N°.....

Exercice N°4:

Figure 1



Exercice N°5:

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Cocher la bonne réponse.

Aucune justification n'est demandée.

1) L'écriture $166 = 11 \times 14 + 12$ représente la division euclidienne de 166 par :

☐ 11

☐ 14

☐ 12

2) L'expression $|4\pi - 9| - |4 - 2\pi| - |5 - 2\pi|$ est égale à :

☐ $4\pi - 9$

☐ $4 - 2\pi$

☐ 0

3) Si $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres d'un cercle de centre O et tel que :

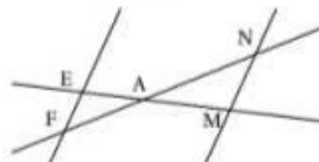
$\widehat{ABC} = 30^\circ$ alors $\widehat{AOC}$ est égale à :

☐ 15°

☐ 30°

☐ 60°

4) Dans la figure suivante on a : $AE = 2 \text{ cm}$; $AM = 5 \text{ cm}$; $EF = 4 \text{ cm}$ et $(MN) \parallel (EF)$.



La distance MN est égale à :

☐ 7 cm

☐ 10 cm

☐ 16 cm



MR Aymen Salhi

Meet: Education en ligne

Classe : 1er année



ETUDE MATH-chbedda



53080851

Epreuve : MATHEMATIQUES	Devoir de synthèse N°1 *****	Commissariat régional Tunis 1
14 Décembre 2023	Sujet commun	Niveau : 1^{ère} Année Tronc Commun
	Durée : 1 h 30	

Le sujet comporte 3 pages dont l'annexe page 3 est à rendre avec la copie.

Exercice N°1: (6 points)

Les questions 1) , 2) et 3) sont indépendantes.

1) Soit l'expression $A(x) = x^2 + 2x - 8$

a) Vérifier que $A(x) = (x + 1)^2 - 9$

b) Factoriser alors $A(x)$.

c) Calculer $A(-1)$.

2) On donne les expressions : $E = x^3 - 27 - (x - 3)(x + 1)^2$ et $F = (x + 3)^3 - (x - 3)^3$

a) Factoriser E

b) Montrer que $F = 18(x^2 + 3)$

c) En déduire que le nombre $N = 2024^3 - 2018^3$ est divisible par 6.

3) Soient $a = 2\sqrt{45} - \sqrt{125} + 2$ et $b = 2\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1) + 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 4\right)$

1/ 1^{re} méthode :

$$\begin{aligned} \text{on a } (x+1)^2 - 9 &= x^2 + 2x + 1 - 9 \\ &= x^2 + 2x - 8 \\ &= A(x) \end{aligned}$$

2^{de} méthode :

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + 2x - 8 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 8 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 9 \\ &= \underbrace{(x+1)^2}_{\text{}} - 9 \end{aligned}$$

b) Factoriser alors $A(x)$.

$$\begin{aligned} A(x) &= (x+1)^2 - 9 \\ &= (x+1)^2 - 3^2 \\ &= (x+1-3)(x+1+3) \end{aligned}$$

$$A(x) = (x-2)(x+4)$$

c) Calculer $A(-1)$.

$$A(-1) = (-3) \times 3$$

$$A(-1) = -9$$

2) On donne les expressions : $E = x^3 - 27 - (x-3)(x+1)^2$ et $F = (x+3)^3 - (x-3)^3$

a) Factoriser E

$$\begin{aligned} E &= x^3 - 3^3 - (x-3)(x+1)^2 \\ E &= (x-3)(x^2+3x+9) - (x-3)(x+1)^2 \end{aligned}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \quad / \text{ Rappel }$$

MR Aymen Salhi

Meet: Education en ligne

Classe : 1er année



ETUDE MATH-chbedda



53080851

$$E = (x-3) \left[x^2 + 3x + 9 - (x+1)^2 \right]$$

$$E = (x-3) \left[\underline{x^2} + 3x + 9 - \underline{x^2} - 2x - 1 \right]$$

$$E = (x-3) (x+8)$$

b) Montrer que $F = 18(x^2 + 3)$

$$F = (x+3)^3 - (x-3)^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a = x+3$$

$$b = x-3$$

$$F(x) = [(x+3) - (x-3)] [(x+3)^2 + (x+3)(x-3) + (x-3)^2]$$

$$= (x+3 - x+3) (x^2 + 6x + 9 + x^2 - 9 + x^2 - 6x + 9)$$

$$= 6 \times (3x^2 + 9)$$

$$= 6 \times 3 (x^2 + 3)$$

$$F(x) = 18(x^2 + 3)$$

MR Aymen Salhi

Meet: Education en ligne

Classe : 1er année



ETUDE MATH-chbedda



53080851

c) En déduire que le nombre $N = 2024^3 - 2018^3$ est divisible par 6.

Soit $x = 2021$

$$\left. \begin{aligned} F &= (x+3)^3 - (x-3)^3 \\ F &= 18(x^2 + 3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (2021+3)^3 - (2021-3)^3 &= 18((2021)^2 + 3) \\ 2024^3 - 2018^3 &= 18((2021)^2 + 3) \\ &= 6[3 \times (2021^2 + 3)] \end{aligned}$$

alors N est multiple de 6 alors
elle est divisible par 6.

3) Soient $a = 2\sqrt{45} - \sqrt{125} + 2$ et $b = 2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1) + 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 4\right)$

a) Montrer que $a = 2 + \sqrt{5}$ et $b = 2 - \sqrt{5}$

$$a = 2\sqrt{9} \times \sqrt{5} - \sqrt{25} \times \sqrt{5} + 2$$

$$a = 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 2$$

$$a = 2 + \sqrt{5}$$

MR Aymen Salhi

Meet: Education en ligne

Classe : 1er année



ETUDE MATH-chbedda



53080851

$$b = 2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1) + 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 4\right)$$

$$b = 10 - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 8$$

$$b = 2 - \sqrt{5}$$

b) Vérifier que $ab = -1$

$$a \times b = (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$$

$$= 2^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$= 4 - 5$$

$$a \times b = -1$$

c) Montrer alors que $\frac{(a^{-2}b)^2 a^5}{a^{-3}b^{-2}} = 1$

$$\frac{(a^{-2}b)^2 a^5}{a^{-3}b^{-2}}$$

$$= \frac{a^{-4}b^2 a^5}{a^{-3}b^{-2}}$$

$$= a^1 b^2 a^3 b^2$$

$$= a^4 b^4$$

$$= (a \cdot b)^4 = (-1)^4 = 1$$

**Exercice N°2: (2 points)**1) Soit x un réel tel que : $0 < x < 1$ a) Montrer que $x^2 < x$ b) En déduire que $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x^2+1}$.2) Montrer que pour tous réels positifs a , b et c on a :

$$(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b \geq 6abc$$

1/a/ Soit $0 < x < 1$

$$x^2 - x = \underbrace{x}_{+} \cdot \underbrace{(x-1)}_{-} < 0$$

on a $x > 0$ $1 > x$ $0 > x-1$

$$x^2 - x < 0$$

et par suite $x^2 < x$

b) En déduire que $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x^2+1}$.pour tout $0 < x < 1$

$$x^2 < x$$

$$0 < x^2 + 1 < x + 1$$

$$\frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{x+1}$$

2) Montrer que pour tous réels positifs a , b et c on a :

$$(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b \geq 6abc$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$= a^2 + b^2 > 2ab$$

$$(a^2 + b^2)c > 2abc \quad (1)$$

$$(b - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc > 0$$

$$b^2 + c^2 > 2bc$$

$$(b^2 + c^2)a > 2abc \quad (2)$$

$$(c - a)^2 = c^2 + a^2 - 2ac > 0$$

$$c^2 + a^2 > 2ac$$

$$(c^2 + a^2)b > 2abc \quad (3)$$

$$(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b \geq 2abc + 2abc + 2abc$$

$$(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b \geq 6abc$$

Exercice N°3: (3,5 points)

Soit (C) est un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$.

M est un point de (C) tel que $\widehat{ABM} = 40^\circ$

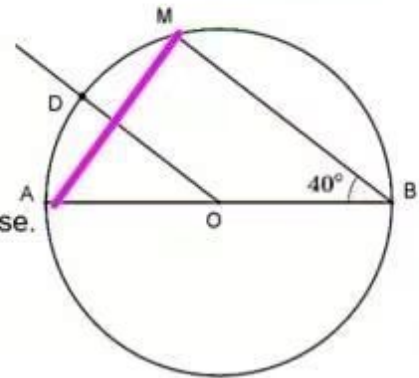
Les droites (OD) et (BM) sont parallèles.

1) a) Quel est la nature du triangle AMB ? Justifier votre réponse.

b) Calculer $\widehat{BAM}$.

2) a) Montrer que $\widehat{AOD} = 40^\circ$.

b) Montrer $[BD)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABM}$



1/a/ $ona [AB]$ diamètre de (C) } alors AMB est un triangle rectangle en M .
 $M \in (C)$

b/

$$\begin{aligned} \widehat{BAM} + \widehat{ABM} &= 90^\circ \\ \widehat{BAM} &= 90 - \widehat{ABM} \\ &= 90 - 40 \end{aligned}$$

$$\widehat{BAM} = 50^\circ$$

MR Aymen Salhi



Education en ligne

Classe : 1er année

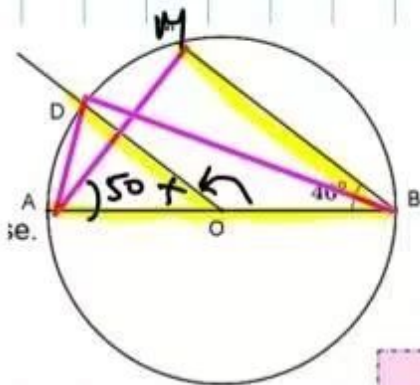


ETUDE MATH-chbedda



53080851

2) a) Montrer que $\widehat{AOD} = 40^\circ$.



$(BM) \parallel (OD)$ qui forment
avec la droite secante (AB)

deux angles correspondants égaux

$$\widehat{AOD} = \widehat{ABM} = 40^\circ$$

b) Montrer (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABM}$

ona $OB = OD$ (Rayon de Cercle $\mathcal{C}$)

OB triangle isocèle en O

$$\begin{aligned}\widehat{BOD} &= 180 - \widehat{AOD} \\ &= 180 - 40 \\ &= 140\end{aligned}$$

et par suite $\widehat{OBD} = \frac{180 - 140}{2} = 20^\circ$

$A \in (OB)$ d'où $\widehat{ABD} = 20$

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{ABM}}{2}$$

MR Aymen Salhi

Meet: Education en ligne

Classe : 1er annee



ETUDE MATH-chbedda



53080851

also [BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABM}$

Exercice N°4: (4,5 points)

On donne le triangle ABC en annexe (Figure 1).

1) Construire dans la figure 1, les points I de [AB] et J de [AC] tels que :

$$AI = \frac{1}{3} AB \text{ et } CJ = \frac{2}{3} AC.$$

2) a) Comparer les rapports $\frac{AI}{AB}$ et $\frac{AJ}{AC}$.

b) En déduire que les droites (BC) et (IJ) sont parallèles.

3) Les droites (BJ) et (CI) se coupent en O.

a) Montrer que le rapport $\frac{OI}{OC} = \frac{1}{3}$.

b) En déduire $CI = 4OI$.

4) a) La droite parallèle à (BC) passant par O coupe la droite (AB) en M
et la droite (AC) en N.

Montrer que $\frac{BM}{BI} = \frac{BO}{BJ}$ et $\frac{CN}{CJ} = \frac{CO}{CI}$.

b) Montrer que le point O est le milieu de [MN].

Figure 1

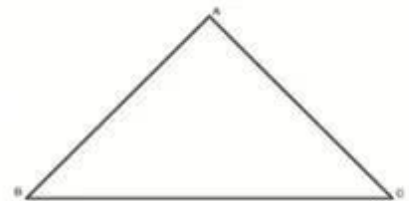
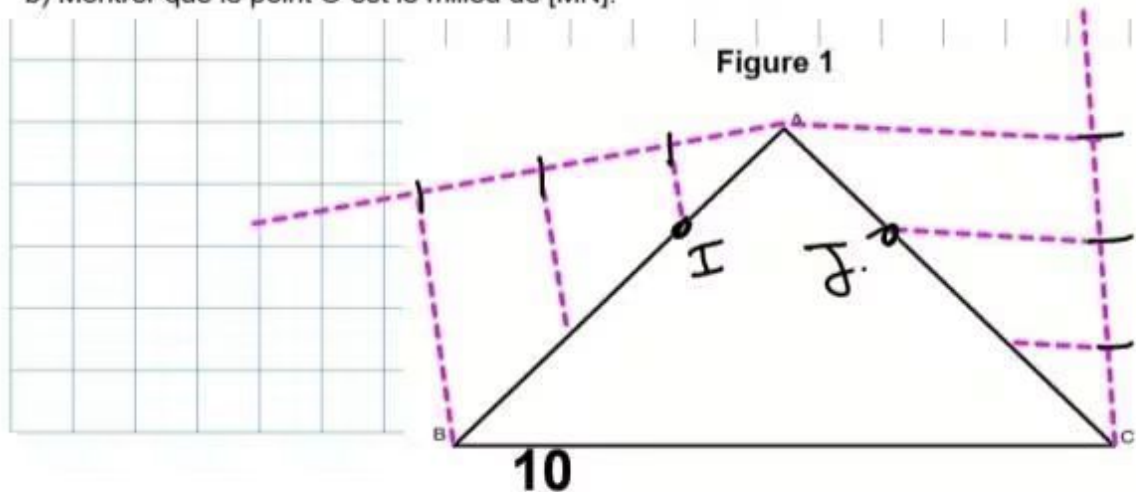


Figure 1



MR Aymen Salhi

Meet: Education en ligne

Classe : 1er année



ETUDE MATH-chbedda



53080851

$$AI = \frac{1}{3} AB \text{ et } CJ = \frac{2}{3} AC.$$

2) a) Comparer les rapports $\frac{AI}{AB}$ et $\frac{AJ}{AC}$.

$$\frac{AI}{AB} = \frac{1}{3}$$

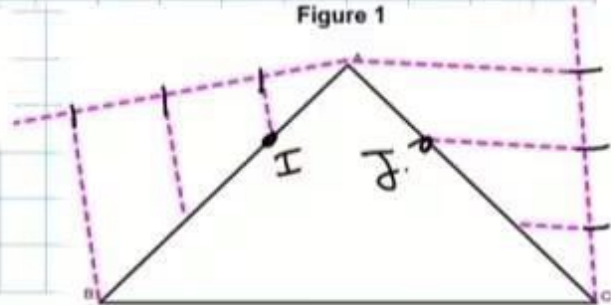
$$\frac{AC}{3} = \frac{AJ}{2}$$

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{1}{3}$$

et par suite

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}.$$

Figure 1



$$\frac{AC}{3} = \frac{CJ}{2} = \frac{AJ}{1} = \frac{CJ + AJ}{2 + 1}$$

b) En déduire que les droites (BC) et (IJ) sont parallèles.

Dans le triangle ABC

on a

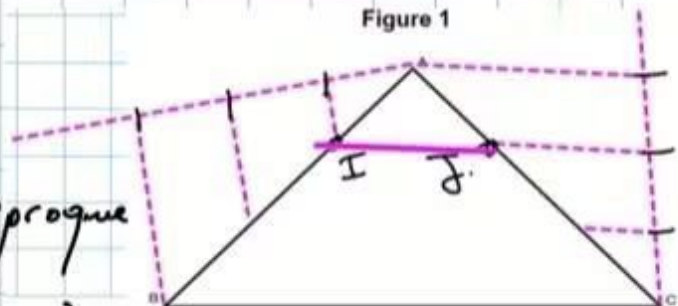
$I \in (AB)$

$J \in (AC)$

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$$

d'après réciproque
de thales.
 $(IJ) \parallel (BC)$

Figure 1



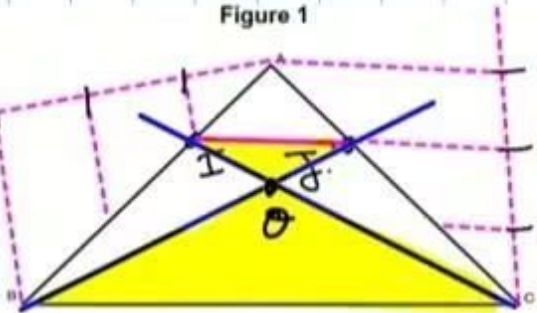
3) Les droites (BJ) et (CI) se coupent en O.

a) Montrer que le rapport $\frac{OI}{OC} = \frac{1}{3}$.

Dans le triangle ABC
 on a $I \in (AB)$
 $J \in (AC)$
 $(IJ) \parallel (BC)$ } d'après Thalès

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC} = \frac{1}{3}$$

Figure 1



Dans le triangle BOC

$I \in (OC)$
 $J \in (OB)$
 $(IJ) \parallel (BC)$ } d'après théorème de Thalès.

$$\frac{OJ}{OB} = \frac{OI}{OC} = \frac{IJ}{BC} = \frac{1}{3}$$

b) En deduire $CI = 4OI$.

$$\frac{OI}{OC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow OC = 3OI$$

$$\begin{aligned} CI &= OI + OC \\ &= OI + 3OI \end{aligned}$$

$$CI = 4OI$$

4) a) La droite parallèle à (BC) passant par O coupe la droite (AB) en M et la droite (AC) en N .

Montrer que $\frac{BM}{BI} = \frac{BO}{BJ}$ et $\frac{CN}{CJ} = \frac{CO}{CI}$.

Dans le triangle IBJ

ona $M \in (BI)$

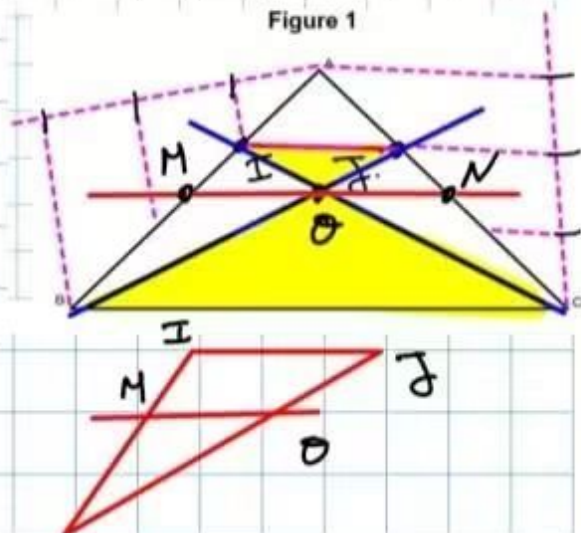
$O \in (BJ)$

$(MO) \parallel (IJ)$

Com $(IJ) \parallel (BC) \parallel (MN)$

d'après
Thales

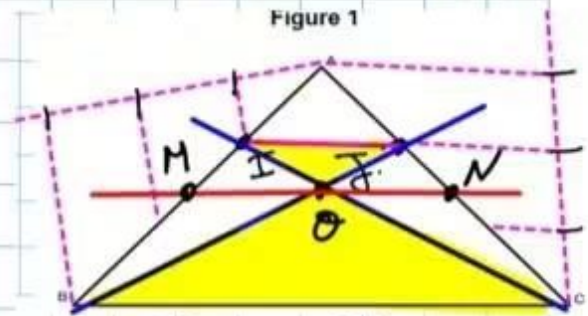
Figure 1



13B

$$\frac{BM}{BI} = \frac{BO}{BJ} = \frac{MO}{IJ}$$

Figure 1



Dans le triangle IJC

on a $O \in (IC)$

$N \in (CJ)$

$(ON) \parallel (IJ)$

d'après théorème
de Thalès

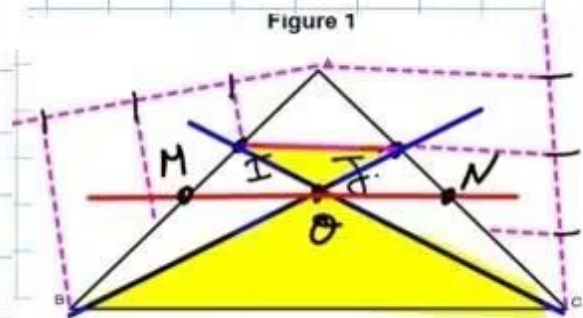
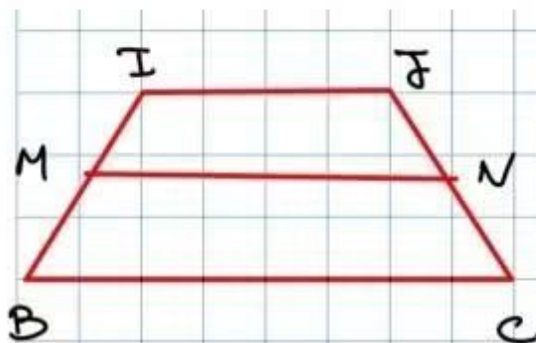
on a

$$\frac{CN}{CJ} = \frac{CO}{CI} = \frac{ON}{IJ}$$

$$= \frac{ON}{IJ}$$

b) Montrer que le point O est le milieu de $[MN]$.

b) Montrer que le point O est le milieu de [MN].



ona $(IJ) \parallel (BC) \Rightarrow IJCB$ est un trapèze

$M \in (BI)$
 $N \in (CJ)$
 $(MN) \parallel (IJ) \parallel (BC)$

d'après Thalès.

$$\frac{BM}{BI} = \frac{CN}{CJ}$$

$$\frac{BM}{BI} = \frac{BO}{BJ} = \frac{MO}{IJ} \quad (1)$$

$$\frac{CN}{CJ} = \frac{CO}{CI} = \frac{ON}{IJ} \quad (2)$$

$$\frac{MO}{IJ} = \frac{ON}{IJ}$$

et par suite $MO = ON$
 et comme M, O et N sont alignés
 alors O est le milieu de [MN]

MR Aymen Salhi

Meet: Education en ligne

Classe : 1er année



ETUDE MATH-chbedda



53080851

Exercice N°5:

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Cocher la bonne réponse.

Aucune justification n'est demandée.

1) L'écriture $166 = 11 \times 14 + 12$ représente la division euclidienne de 166 par :

☐ 11

☒ 14

☐ 12

2) L'expression $|4\pi - 9| - |4 - 2\pi| - |5 - 2\pi|$ est égale à : $4\pi - 9 - 2\pi + 4 - 2\pi + 5$

☐ $4\pi - 9$

☐ $4 - 2\pi$

☒ 0

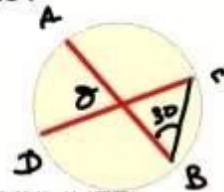
3) Si $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres d'un cercle de centre O et tel que :

$\widehat{ABC} = 30^\circ$ alors $\widehat{AOC}$ est égale à :

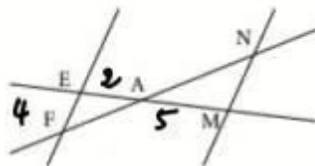
☐ 15°

☐ 30°

☒ 60°



4) Dans la figure suivante on a : $AE = 2$ cm ; $AM = 5$ cm ; $EF = 4$ cm et $(MN) \parallel (EF)$.



La distance MN est égale à :

☐ 7 cm

☒ 10 cm

☐ 1.6 cm

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{MN} \Rightarrow MN = \frac{4 \times 5}{2}$$

