

Exercice 1

Cocher les propositions justes :

☐ $\sqrt{4+9} = 2+3$

☐ $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

☐ $-\sqrt{5^2} = 5$

☐ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

☐ $\frac{3}{5} \leq \frac{3}{7}$

☐ $\sqrt{2}+1$ est l'inverse de $\sqrt{2}-1$

☐ $\sqrt{5}-2$ et $\sqrt{5}+2$ sont opposés.

☐ $0.00001 = 10^{-4}$

☐ -5^4 est positif

☐ $\sqrt{a^2} = a$ pour tout réel a .

☐ $|2-\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}$

Exercice 2

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{(-3)^9 \times 2^6 \times 6^3 \times 20^4}{(12^5 \times (-15)^2)^2}, B = \frac{\sqrt{63} + \sqrt{28} - \sqrt{112}}{\sqrt{49}\sqrt{7}} \text{ et } C = |2-\sqrt{3}| + |\pi-5| - |\pi-\sqrt{3}|$$

2) Ecrire sans racines carrées l'expression $D = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$

3) Ecrire l'expression $E = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ sans radical au dénominateur.

Exercice 3

Simplifier les expressions $A = \sqrt{20} - 2\sqrt{45} + 3\sqrt{80}$ et $B = \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

Exercice 4

1) Ecrire les inverses des nombres suivants sans radical au dénominateur $1-\sqrt{3}$, $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ et $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$

2) Déterminer l'inverse de $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ où $n \in \mathbb{N}$

3) Simplifier $S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

Exercice 5

Simplifier :

$$A = \frac{3}{4} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}$$

$$B = \frac{13 \times 10^{14} \times 10^6}{2 \times (10^7)^3}$$

$$C = \frac{2+\frac{3}{5}}{-\frac{3}{7}+1} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$$

$$D = \frac{2^{-5} \times (-6)^3 \times 3^{-4}}{-9^{-2} \times 8^{-4}}$$

$$E = \frac{49 \times (-2)^5 \times (-3)^{-2}}{-7^2 \times 16 \times 3^{-3}}$$

$$F = \frac{(-5)^4 \times 7^2 \times (-2)^{-3}}{(-4)^4 \times (-1)^5 \times 25}$$

Exercice 6

Simplifier les expressions suivantes, a et b sont des nombres réels non nuls :

$$E = \frac{(a^{-3})^{-2} \times a^5}{a^7 \times a^{-3}}$$

$$F = \frac{(a^2 b^{-2})^3 a^{-6} b^2}{(a^{-1} b^{-2})^2}$$

$$G = \frac{ab^{-3}(a^{-2}b^2)(ab^{-1})^2}{(ab^2)^{-1}ab}$$

$$H = \sqrt[3]{\frac{48a^8b^{12}}{243(ab)^4}}$$

Exercice 7

Ecrire sous la forme d'une puissance de 10 :

$$A = 1000^7 \times (0.01)^{10}$$

$$B = \frac{100^3}{(0.1)^9 \times 10000^5}$$

$$C = \frac{(0.001)^2 \times 10000^5}{(-0.01)^4}$$

$$D = \frac{(0.0001)^{-4} \times (10000)^5 \times (-0.001)^7}{[10 \times (0.01)^3]^4}$$

Exercice 8

Simplifier les expressions suivantes :

$$G = \frac{3\sqrt{18} - 2\sqrt{2} + \sqrt{50}}{\sqrt{32} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{8}}$$

$$H = \sqrt{(0.1)^4} \times \sqrt{500}$$

$$I = \sqrt{10^2} - \sqrt{(-8)^2}$$

$$J = \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} - 2\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$$

Exercice 9

Soit a et b deux réels strictement positifs et distincts.

1) Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

2) Montrer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{a+b}$

3) a) Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$

b) En déduire que pour tout $a \neq 1$, $a + \frac{1}{a} > 2$

Exercice 10

1) Compléter et représenter les ensembles suivants :

$$E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \dots\} = [-2, +\infty[$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 1 \leq x < \pi\} \text{ est l'intervalle } \dots$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x| \leq 2\} \text{ est l'intervalle } \dots$$

2) Soit x un réel tel que $1 \leq x \leq 3$

a) Trouver un encadrement de $2x - 1$ et un encadrement de $\frac{1}{2x-1}$

b) Encadrer $\frac{x}{2x-1}$

Exercice 11

Soit $\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |3 - 2x| < 3\}$

1) Écrire B sous la forme d'un intervalle.

2) Soit x un réel appartenant à B . Encadrer x^2 et $5x - 4$.

Exercice 12

Écrire à l'aide d'intervalle puis représenter les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x - 2| < 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |1 - 2x| \leq 7\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |3 - 2x| > 1\}$$

Exercice 13

On considère les réels $a = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ et $b = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

1) Montrer que $a = 2 + \sqrt{3}$ et $b = 2 - \sqrt{3}$

2) Calculer $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ et $a^{2021} \times b^{2021}$

Exercice 14

Soit $a = 3\sqrt{27} - 2\sqrt{48} + \sqrt{32} - 5\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{8}$

1) a) Montrer que $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

b) Montrer que a est l'inverse de b

2) a) Calculer $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

b) En déduire que $\sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}} = \sqrt{10}$

Exercice 1

☐ $\sqrt{4+9} = 2+3$

☒ $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

☐ $-\sqrt{5^2} = 5$

☒ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

☐ $\frac{3}{5} \leq \frac{3}{7}$

☒ $\sqrt{2}+1$ est l'inverse de $\sqrt{2}-1$

☐ $\sqrt{5}-2$ et $\sqrt{5}+2$ sont opposés.

☐ $0.00001 = 10^{-4}$

☐ -5^4 est positif

☐ $\sqrt{a^2} = a$ pour tout réel a .

☐ $|2-\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}$

Exercice 2

1)

$$\begin{aligned} A &= \frac{(-3)^9 \times 2^6 \times 6^3 \times 20^4}{(12^5 \times (-15)^2)^2} \\ &= \frac{(-3)^9 \times 2^6 \times (2 \times 3)^3 \times (2^2 \times 5)^4}{12^{5 \times 2} \times (-15)^{2 \times 2}} \\ &= \frac{-3^9 \times 2^6 \times 2^3 \times 3^3 \times 2^{2 \times 4} \times 5^4}{12^{10} \times (-15)^4} \\ &= \frac{-3^{12} \times 2^9 \times 2^8 \times 5^5}{(2^2 \times 3)^{10} \times 15^4} \\ &= \frac{-3^{12} \times 2^{17} \times 5^5}{2^{2 \times 10} \times 3^{10} \times (5 \times 3)^4} \\ &= \frac{-3^{12} \times 2^{17} \times 5^5}{2^{20} \times 3^{10} \times 5^4 \times 3^4} \\ &= \frac{-3^{12} \times 2^{17} \times 5^5}{2^{20} \times 3^{14} \times 5^4} \\ &= -\frac{5}{2^3 \times 3^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{63} + \sqrt{28} - \sqrt{112}}{\sqrt{49}\sqrt{7}} \\ &= \frac{\sqrt{3^2 \times 7} + \sqrt{4 \times 7} - \sqrt{4^2 \times 7}}{\sqrt{7^2}\sqrt{7}} \\ &= \frac{\sqrt{3^2}\sqrt{7} + \sqrt{4}\sqrt{7} - \sqrt{4^2}\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} \\ &= \frac{3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 4\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} \\ &= \frac{\cancel{\sqrt{7}}}{7\cancel{\sqrt{7}}} \\ &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= |2-\sqrt{3}| + |\pi-5| - |\pi-\sqrt{3}| \\ &= 2-\sqrt{3} + 5-\pi - (\pi-\sqrt{3}) \\ &= 7-\cancel{\sqrt{3}} - \pi - \pi + \cancel{\sqrt{3}} \\ &= 7-2\pi \end{aligned}$$

$$2) D = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| + |2-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) + 2-\sqrt{2} = -1+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 1$$

$$3) E = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{5^2}-\sqrt{3^2}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$$

Exercice 3

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{20} - 2\sqrt{45} + 3\sqrt{80} \\ &= \sqrt{4 \times 5} - 2\sqrt{9 \times 5} + 3\sqrt{16 \times 5} \\ &= \sqrt{4}\sqrt{5} - 2 \times 3\sqrt{5} + 3 \times 4\sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 12\sqrt{5} \\ &= 8\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3^2}-\sqrt{2^2}} - \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3^2}}{2^2-\sqrt{3^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} - \frac{2\sqrt{3}-3}{4-3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{1} - \frac{2\sqrt{3}-3}{1} \\ &= 2\sqrt{3}+2\sqrt{2} - (2\sqrt{3}-3) \\ &= \cancel{2\sqrt{3}}+2\sqrt{2}-\cancel{2\sqrt{3}}+3 \\ &= 3+2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercice 4

$$1) \frac{1}{1-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{1^2-\sqrt{3}^2} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-3} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{6}^2} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{1} = \sqrt{7}+\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}{(2\sqrt{2}-\sqrt{7})(2\sqrt{2}+\sqrt{7})} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}{(2\sqrt{2})^2-\sqrt{7}^2} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}{8-7} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}{1} = 2\sqrt{2}+\sqrt{7}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

3) On a d'après 2)

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}+\sqrt{1}} = \sqrt{1+1}-\sqrt{1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \sqrt{4}-\sqrt{3}$$

⋮

$$\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = \sqrt{100}-\sqrt{99}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } S &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \\ &= \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{100}-\sqrt{99} \\ &= \sqrt{100}-1 \\ &= 10-1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Exercice 5

$$A = \frac{3}{4} - \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{\cancel{4}_2} \times \frac{\cancel{2}}{5} = \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{15}{20} - \frac{4}{20} = \frac{11}{20}$$

$$B = \frac{13 \times 10^{14} \times 10^6}{2 \times (10^7)^3} = \frac{13 \times 10^{20}}{2 \times 10^{7 \times 3}} = \frac{13 \times 10^{20}}{2 \times 10^{21}} = \frac{13}{2 \times 10} = \frac{13}{20}$$

$$C = \frac{2+\frac{3}{5}}{-\frac{3}{7}+1} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{\frac{10}{5}+\frac{3}{5}}{-\frac{3}{7}+\frac{7}{7}} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{\frac{13}{5}}{\frac{4}{7}} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{13}{5} \times \frac{7}{\cancel{4}_2} \times \frac{\cancel{2}}{3} + \frac{1}{6} = \frac{91}{30} + \frac{1}{6} = \frac{91}{30} + \frac{5}{30} = \frac{96}{30} = \frac{16}{5}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{2^{-5} \times (-6)^3 \times 3^{-4}}{-9^{-2} \times 8^{-4}} \\ &= \frac{2^{-5} \times (-2 \times 3)^3 \times 3^{-4}}{-(3^2)^{-2} \times (2^3)^{-4}} \\ &= \frac{2^{-5} \times (-2)^3 \times 3^3 \times 3^{-4}}{-3^{-4} \times 2^{-12}} \\ &= \frac{2^{-5} \times (-2^3) \times 3^3 \times \cancel{3^3}}{-\cancel{3^4}} \times 2^{12} \\ &= \frac{(-2^3 \times 2^{-5} \times 2^{12}) \times 3^3}{-1} \\ &= \frac{(-2^{10}) \times 3^3}{-1} \\ &= 2^{10} \times 3^3 \end{aligned}$$

$$E = \frac{49 \times (-2)^5 \times (-3)^{-2}}{-7^3 \times 16 \times 3^{-3}} = \frac{7^2 \times (-2)^5 \times (-3)^{-2}}{-7^3 \times 2^4} \times 3^3 = \frac{-2^5 \times 3^{-2}}{-7} \times 3^3 \times 2^{-4} = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$$

$$F = \frac{(-5)^4 \times 7^2 \times (-2)^{-3}}{(-4)^4 \times (-1)^5 \times 25} = \frac{5^4 \times 7^2 \times (-2)^{-3}}{4^4 \times (-1) \times 5^2} = \frac{\cancel{5^4}^{\cancel{5^2}} \times 7^2 \times (-2)^{-3}}{4^4 \times (-1) \times \cancel{5^2}} = \frac{5^2 \times 7^2 \times 2^{-3}}{(2^2)^4} = \frac{5^2 \times 7^2}{2^8 \times 2^3} = \frac{5^2 \times 7^2}{2^{11}}$$

Exercice 6

$$E = \frac{(a^{-3})^{-2} \times a^5}{a^7 \times a^{-3}} = \frac{a^6 \times a^5}{a^4} = \frac{a^{11}}{a^4} = a^7$$

$$F = \frac{(a^2 b^{-2})^3 a^{-6} b^2}{(a^{-1} b^{-2})^2} = \frac{\cancel{a^6}^{\cancel{a^6}} \cancel{b^{-6}}^{\cancel{b^{-6}}} a^{-6} b^2}{a^{-2} b^{-4}} = \frac{\cancel{b^{-4}}^{\cancel{b^{-4}}} a^2}{b^{-4}} = a^2$$

$$G = \frac{ab^{-3}(a^{-2}b^3)(ab^{-1})^2}{(ab^2)^{-1}ab} = \frac{ab^{-3}a^{-2}b^3a^2b^{-2}}{a^{-1}b^{-2}ab} = \frac{ab^{-2}}{b^{-1}} = ab^{-1} = \frac{a}{b}$$

$$H = \sqrt{\frac{48a^8b^{12}}{243(ab)^4}} = \sqrt{\frac{48}{243} \times \frac{a^8}{a^4} \times \frac{b^{12}}{b^4}} = \sqrt{\frac{16}{81} \times a^4 \times b^8} = \sqrt{\frac{16}{81}} \times \sqrt{a^4} \times \sqrt{b^8} = \frac{4}{9} \times a^2 \times b^4$$

Exercice 7

$$A = 1000^7 \times (0.01)^{10} = (10^3)^7 \times (10^{-2})^{10} = 10^{21} \times 10^{-20} = 10$$

$$B = \frac{100^3}{(0.1)^9 \times 10000^3} = \frac{(10^2)^3}{(10^{-1})^9 \times (10^4)^3} = \frac{10^6}{10^{-9} \times 10^{12}} = \frac{10^6}{10^3} = 10^3$$

$$C = \frac{(0.001)^3 \times 10000^5}{(-0.01)^4} = \frac{(10^{-3})^3 \times (10^4)^5}{(-10^{-2})^4} = \frac{10^{-9} \times (10^4)^5}{(-1)^4 \times (10^{-2})^4} = \frac{10^{-9} \times 10^{20}}{1 \times 10^8} = \frac{10^{11}}{10^8} = 10^3$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{(-0.0001)^{-4} \times (10000)^5 \times (0.001)^7}{[10 \times (0.01)^3]^4} \\ &= \frac{(-10^{-4})^{-4} \times (10^5)^5 \times (10^{-3})^7}{[10 \times (10^{-2})^3]^4} \\ &= \frac{(-1)^{-4} \times 10^{16} \times 10^{25} \times (10^{-3})^7}{[10 \times 10^{-6}]^4} \\ &= \frac{1 \times 10^{41} \times 10^{-21}}{[10^{-5}]^4} \\ &= \frac{10^{20}}{10^{-20}} \\ &= 10^0 \end{aligned}$$

Exercice 8

$$\begin{aligned} G &= \frac{3\sqrt{18} - 2\sqrt{2} + \sqrt{50}}{\sqrt{32} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{8}} \\ &= \frac{3\sqrt{9 \times 2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{25 \times 2}}{\sqrt{16 \times 2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{4 \times 2}} \\ &= \frac{3\sqrt{9} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{25} \times \sqrt{2}}{\sqrt{16} \times \sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{4} \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{9\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}} \\ &= \frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$H = \sqrt{(0.1)^4} \times \sqrt{500} = (0.1)^2 \times \sqrt{100 \times 5} = (10^{-1})^2 \times \sqrt{100} \times \sqrt{5} = 10^{-2} \times 10 \times \sqrt{5} = 10^{-1} \sqrt{5}$$

$$I = \sqrt{10^2} - \sqrt{(-8)^2} = 10 - |-8| = 10 - 8 = 2$$

$$J = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |1+\sqrt{5}| - 2|2-\sqrt{5}| = 1+\sqrt{5} - 2 \times (2-\sqrt{5}) = 1+\sqrt{5} - 2 \times 2 + 2\sqrt{5} = 1+\sqrt{5} - 4 + 2\sqrt{5} = 5 - \sqrt{5}$$

Exercice 9

- 1) Pour tous réels strictement positifs
- a
- et
- b
- ,

$$\sqrt{a+b}^2 = a+b$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} = a+b+2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 = 2\sqrt{ab} > 0 \text{ donc } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > \sqrt{a+b}^2 \text{ et par suite } \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

- 2) Pour tous réels strictement positifs
- a
- et
- b
- ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} &= \frac{b(a+b)}{ab(a+b)} + \frac{a(a+b)}{ab(a+b)} - \frac{ab}{ab(a+b)} \\ &= \frac{b(a+b) + a(a+b) - ab}{ab(a+b)} \\ &= \frac{ab + b^2 + a^2 + ab - ab}{ab(a+b)} \\ &= \frac{ab + b^2 + a^2}{ab(a+b)} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{a+b}$$

- 3) a) Pour tous réels distincts et strictement positifs
- a
- et
- b
- ,
- $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} = \frac{a^2+b^2}{ab}$

$$\text{donc } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2+b^2}{ab} - 2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

a et b sont strictement positifs donc $ab > 0$

a et b sont distincts donc $(a-b) > 0$

$$\text{et par suite } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{(a-b)^2}{ab} > 0$$

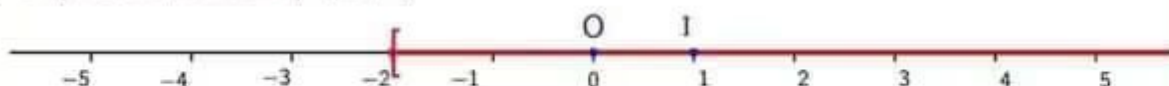
$$\text{donc } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$$

- b) pour
- a
- strictement positif et
- $a \neq 1$
- , on pose
- $b = \frac{1}{a}$
- donc
- a
- et
- b
- sont strictement positif et distincts et par suite

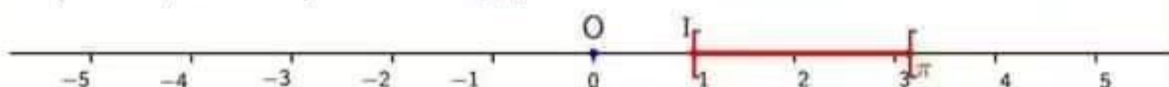
$$\text{d'après a) } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} + a > 2$$

Exercice 10

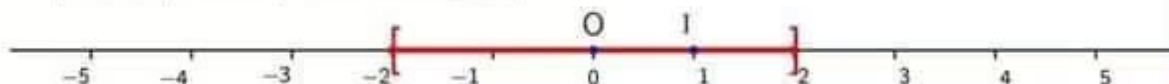
- 1)
- $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq -2\} = [-2, +\infty[$



$F = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 1 \leq x < \pi\}$ est l'intervalle $[1, \pi[$



$H = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x| \leq 2\}$ est l'intervalle $[-2, 2]$



- 2) a)
- $1 \leq x \leq 3$
- signifie
- $2 \leq 2x \leq 6$
- signifie
- $1 \leq 2x-1 \leq 5$

$$0 < 1 \leq 2x-1 \leq 5 \text{ donc } \frac{1}{5} \leq \frac{1}{2x-1} \leq 1$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{5} \leq \frac{1}{2x-1} \leq 1 \end{array} \right\} \text{ donc } 1 \times \frac{1}{5} \leq \frac{x}{2x-1} \leq 3 \times 1 \text{ donc } \frac{1}{5} \leq \frac{x}{2x-1} \leq 3$$

Exercice 11

- 1)
- $x \in B \Leftrightarrow |3-2x| < 3$

$$\Leftrightarrow -3 < 3 - 2x < 3$$

$$\Leftrightarrow -6 < -2x < 0$$

$$\Leftrightarrow 3 > x > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 3$$

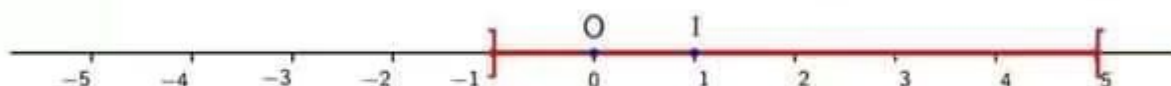
$$\Leftrightarrow x \in]0, 3[$$

$$2) x \in B \Leftrightarrow x \in]0, 3[\Leftrightarrow 0 < x < 3 \Leftrightarrow 0 < x^2 < 9$$

$$x \in B \Leftrightarrow x \in]0, 3[\Leftrightarrow 0 < x < 3 \Leftrightarrow 0 < 5x < 15 \Leftrightarrow -4 < 5x - 4 < 11$$

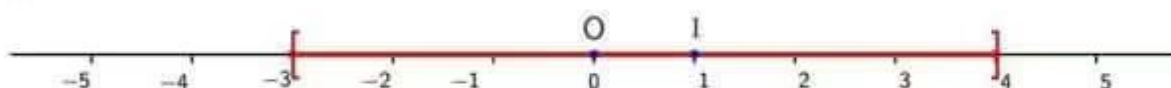
Exercice 12

$$x \in A \Leftrightarrow |x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow x \in]-1, 5[\text{ donc } A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x - 2| < 3\} =]-1, 5[$$



$$x \in B \Leftrightarrow |1 - 2x| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq 1 - 2x \leq 7 \Leftrightarrow -8 \leq -2x \leq 6 \Leftrightarrow 4 \geq x \geq -3 \Leftrightarrow x \in [-3, 4]$$

$$\text{donc } B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |1 - 2x| \leq 7\} = [-3, 4]$$

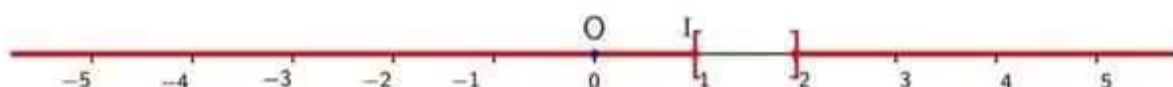


$$x \in C \Leftrightarrow |3 - 2x| > 1 \Leftrightarrow 3 - 2x > 1 \text{ ou } 3 - 2x < -1$$

$$\Leftrightarrow -2x > -2 \text{ ou } -2x < -4$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \text{ ou } x > 2$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$



Exercice 13

$$1) a = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3}$$

$$b = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3}$$

$$2) \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$a^{2021} \times b^{2021} = (a \times b)^{2021} = \left((2 + \sqrt{3}) \times \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right)^{2021} = 1^{2021} = 1$$

Exercice 14

$$\begin{aligned} 1) a &= 3\sqrt{27} - 2\sqrt{48} + \sqrt{32} - 5\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{9 \times 3} - 2\sqrt{16 \times 3} + \sqrt{16 \times 2} - 5\sqrt{2} \\ &= 3 \times 3\sqrt{3} - 2 \times 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \\ &= 9\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{8} \\ &= \sqrt{25 \times 3} - 2\sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{4 \times 2} \\ &= 5\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$b) a \times b = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2 = 3 - 2 = 1 \text{ donc } b \text{ est l'inverse de } a.$$

$$2) \text{ a) } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = b + a = \sqrt{3} + \cancel{\sqrt{2}} + \sqrt{3} - \cancel{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2}{ab} + \frac{a^2}{ab}$$

$$= \frac{b^2 + a^2}{ab}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{1}$$

$$= \sqrt{3}^2 + 2 \times \cancel{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} + \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \times \cancel{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} + \sqrt{2}^2$$

$$= 3 + 2 + 3 + 2$$

$$= 10$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} = \sqrt{10}$$