

EXERCISE 01

Soient les points $A(2 ; 3)$, $B(4 ; -1)$, $C(0 ; -3)$ et $D(-2 ; 1)$ dans le plan muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Montrer que $ABCD$ est un carré de centre I .

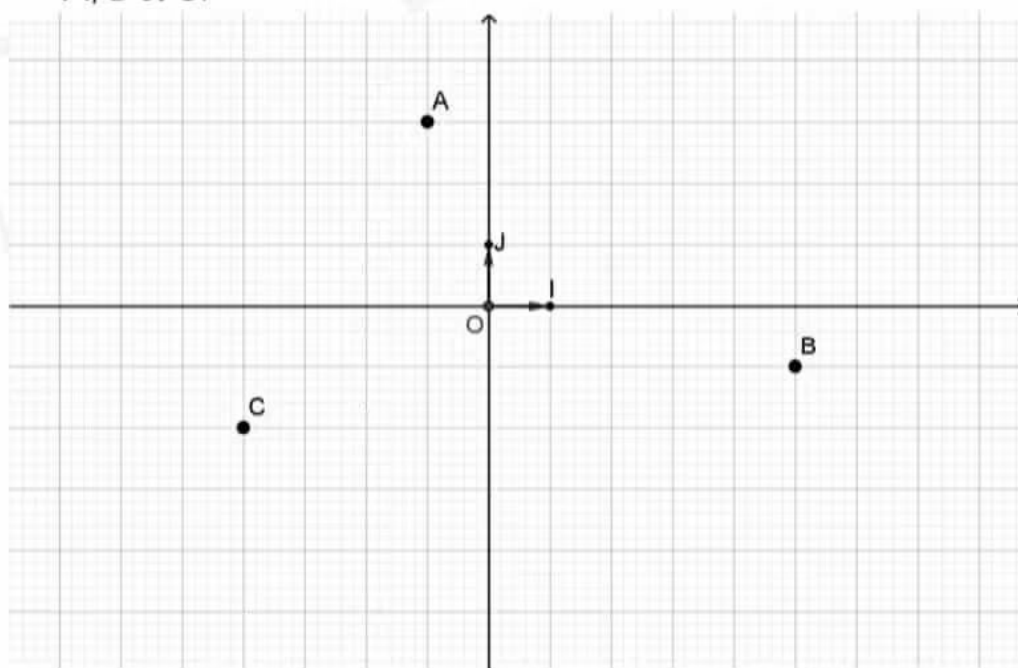
EXERCISE 02

Soit le repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ du plan, on donne les points : $A(2 ; 3)$, $B(4 ; -1)$, $C(1 ; -3)$ et D tel que $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OI} - 4\overrightarrow{OJ}$

- 1) Vérifier que $D(-1 ; 1)$
- 2) a. Placer les points A , B , C et D
b. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
- 3) On donne $E(6 ; 5)$
 - a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires, on déterminera le réel α tel que $\overrightarrow{IA} = \alpha \overrightarrow{BE}$.
 - b. Montrer que le triangle IJE est rectangle.
 - c. Montrer que le triangle ABE est isocèle.

EXERCISE 03

Soit $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère orthonormé du plan dont on a placé les points A , B et C .



1.
 - a. Donner les coordonnées des points A, B et C.
 - b. Déterminer, par calcul, les coordonnées de K le milieu de [AB] puis placer K.
 - c. Montrer que les points O, K et C sont alignés.
2. Soit $E(-1 ; -4)$, montrer que le quadrilatère ACEK est un parallélogramme
3. Soit D le point tel que $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{OI}$.
 - a. Vérifier que $D(0 ; -2)$.
 - b. Montrer que le triangle ABD est rectangle et isocèle en D.

EXERCISE 04

Soit ABCD un parallélogramme, I le milieu de [AB] et E le point tel que : $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$. (sans faire la figure)

1. Prouver que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$
2. En déduire que les points A, C et E sont alignés.
3. On considère le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$)
 - a. Donner dans ce repère les coordonnées des points A, C et E.
 - b. Retrouver le résultat de question (2)

EXERCISE 02

axe des ordonnées
axe des abscisses
origine

Soit le repère cartésien $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ du plan, on donne les points : $A(2;3)$, $B(4;-1)$, $C(1;-3)$ et D tel que $\vec{DC} = 2\vec{OI} - 4\vec{OJ}$

- 1) Vérifier que $D(-1; 1)$
- 2) a. Placer les points A, B, C et D
b. Montrer que ABCD est un parallélogramme.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1) \vec{DC} = 2\vec{OI} - 4\vec{OJ}$$

$$\Rightarrow \vec{DC} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Comme $\vec{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$

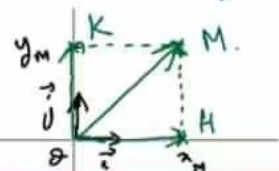
$$\text{alors } \begin{cases} x_C - x_D = 2 \\ y_C - y_D = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x_D = 2 \\ -3 - y_D = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D = 1 - 2 = -1 \\ y_D = -3 + 4 = 1 \end{cases}$$

donc $D(-1; 1)$

2) a.

$M(x; y)$ signifie
 $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
 $= x\vec{OI} + y\vec{OJ}$



$$\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{OK}$$

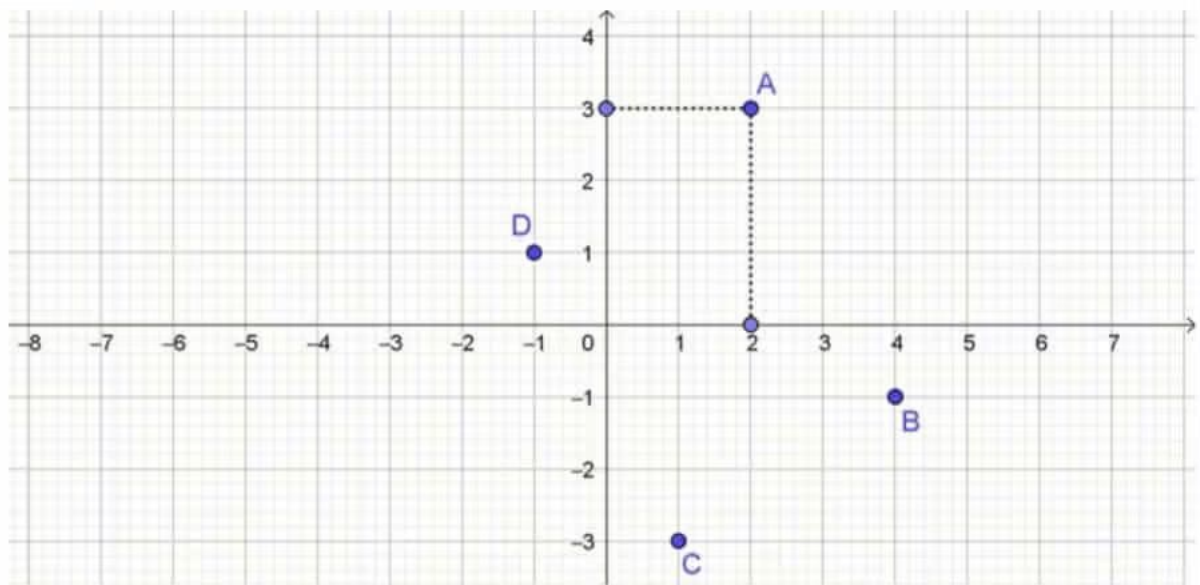
$$= x_M \vec{OI} + y_M \vec{OJ}$$

$$\vec{MN} = -\vec{OM} + \vec{ON}$$

$$= (x_N - x_M)\vec{i} + (y_N - y_M)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$$

abs
ord.
les composantes de $\vec{MN}$



2.b) $\overrightarrow{ABCD}$ est un #.

1^{ère} méthode: $\cdot \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 1 - 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ -1 - (-3) \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

on a $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$

d'où $ABCD$ est un parallélogramme

2^{ème} Méthode:

Le milieu de $[AC]$: $\left(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2} \right)$

2

$$\Rightarrow \left(\frac{2+1}{2} ; \frac{3+(-3)}{2} \right) \Rightarrow \left(\frac{3}{2} ; 0 \right).$$

Les coordonnées de $[BD]$: $\left(\frac{x_B + x_D}{2} ; \frac{y_B + y_D}{2} \right)$.

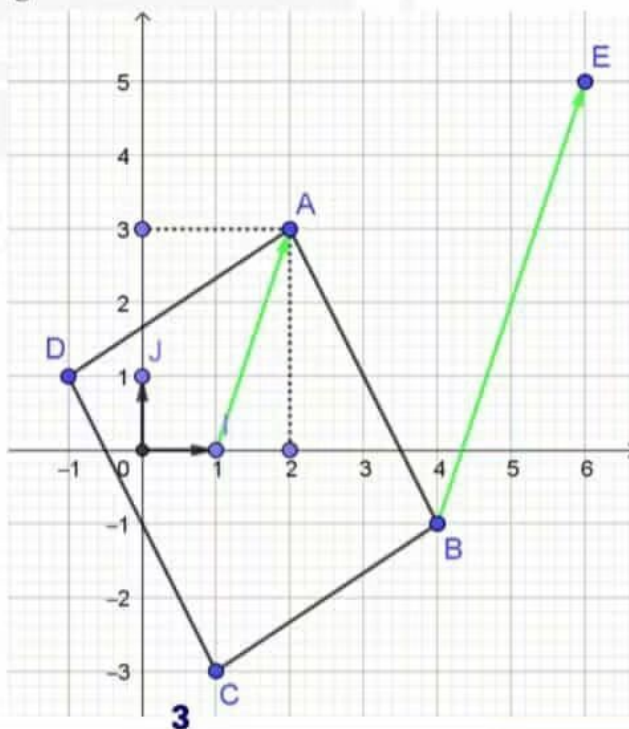
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{4 + (-1)}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{2} ; 0 \right).$$

d'où $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu de coordonnées $\left(\frac{3}{2} ; 0 \right)$

d'où $ABCD$ est un #.

3) On donne $E(6 ; 5)$

- Montrer que les vecteurs $\vec{IA}$ et $\vec{BE}$ sont colinéaires, on déterminera le réel α tel que $\vec{IA} = \alpha \vec{BE}$.
- Montrer que le triangle IJE est rectangle.
- Montrer que le triangle ABE est isocèle.



$$3.a) \quad \vec{IA} \begin{pmatrix} x_A - x_I \\ y_A - y_I \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{IA} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{IA} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} I(1;0) \\ J(0;1) \end{matrix} \right\} \quad \vec{BE} \begin{pmatrix} x_E - x_B \\ y_E - y_B \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{BE} \begin{pmatrix} 6-4 \\ 5-(-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{BE} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où } \vec{IA} \text{ et } \vec{BE} \text{ sont colinéaires}$$

et on a : $\alpha = \frac{1}{2}$

et $\vec{IA} = \frac{1}{2} \vec{BE}$

$$\vec{AB} = k \vec{CD} \quad (\vec{AB} \text{ et } \vec{CD} \text{ colinéaires})$$

signifie.

$$k = \frac{x_B - x_A}{x_D - x_C} = \frac{y_B - y_A}{y_D - y_C}$$

3.b) * Justifions que I, J et E ne sont pas alignés.

$$\vec{IE} \begin{pmatrix} 6-1 \\ 5-0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{IE} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{IJ} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{IJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{5}{-1} = -5 \quad \text{et} \quad \frac{5}{1} = 5$$

on a : $-5 \neq 5$ d'où les vecteurs $\vec{IE}$ et $\vec{IJ}$ ne sont pas colinéaires

d'où I, J et E ne sont pas alignés

Distance entre deux points dans un repère du plan.

$$M(x_M, y_M)$$

$$N(x_N, y_N)$$

$$\vec{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$$

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$$

donc ils forment un triangle. ①

$$* \vec{IE} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow IE = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{2 \times 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\vec{IJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow IJ = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$JE = \sqrt{(6-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{52}^2 = 52 \\ \sqrt{2}^2 = 2 \\ (5\sqrt{2})^2 = 50 \end{array} \right\} 52 = 2 + 50$$

$$\text{d'où } JE^2 = IJ^2 + IE^2$$

d'après la réciproque de th. de Pythagore

on conclut que $\triangle IJE$ est un triangle rectangle en I.

3-c) * Vérifions que A, B et E non alignés.

$$\vec{AE} \begin{pmatrix} 6-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AE} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{4}{2} = 2 \neq \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\vec{BE} \begin{pmatrix} 6-4 \\ 5-(-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{BE} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

d'où $\vec{AE}$ et $\vec{BE}$ ne sont pas colinéaires

et donc A, E et B forment un triangle.

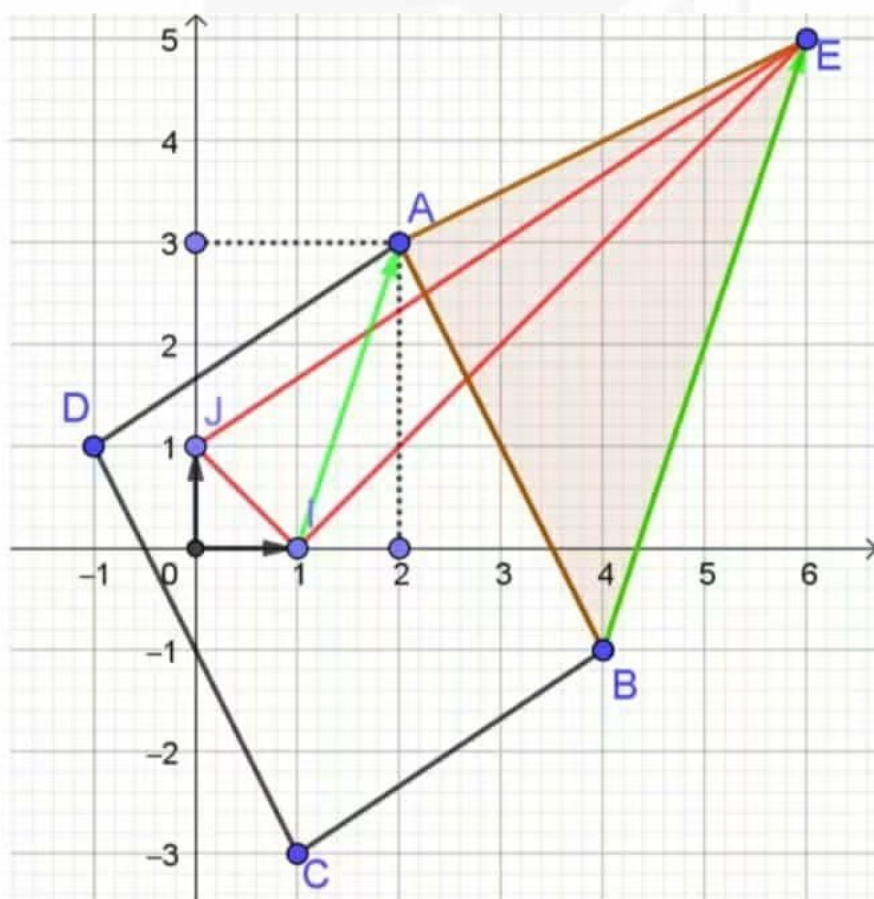
$$* AE = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

$$BE = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

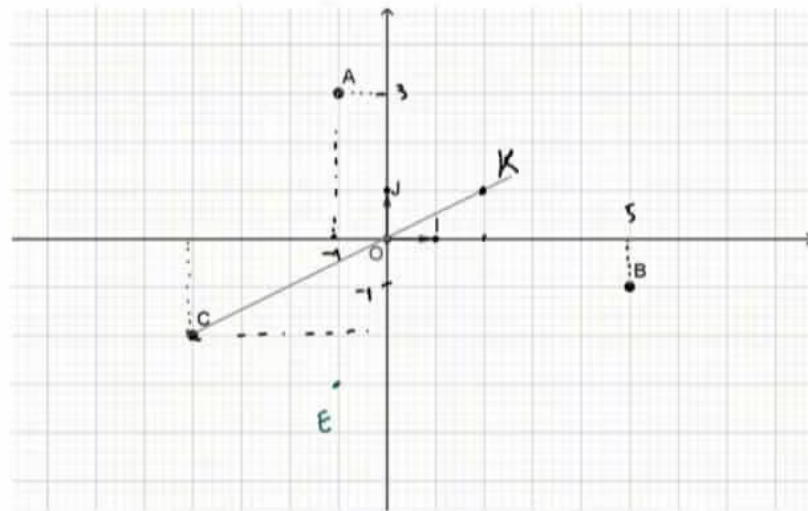
$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

ona . $AE = AB = \sqrt{20} \Rightarrow ABE$ est un triangle isocèle en A.

Rqwe: ABE est rectangle en A.
(car $AE^2 + AB^2 = BE^2$)



E13°



1.

- Donner les coordonnées des points A, B et C.
- Déterminer, par calcul, les coordonnées de K le milieu de [AB] puis placer K.
- Montrer que les points O, K et C sont alignés.

1. a) $A(-1; 3)$; $B(5; -1)$; $C(-4; -2)$

1. b) K est le milieu de [AB].

$$\left. \begin{aligned} x_K &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2 \\ y_K &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow K(2; 1)$$

1. c) $\vec{OK} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{OC} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} \text{ d'où } \vec{OK} \text{ et } \vec{OC} \text{ sont colinéaires}$$

et par suite les points O, C et K sont alignés.

2. Soit E(-1 ; -4), montrer que le quadrilatère ACEK est un parallélogramme

3. Soit D le point tel que $\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{AB} - 3\vec{OI}$.

a. Vérifier que D(0 ; -2).

b. Montrer que le triangle ABD est rectangle et isocèle en D.

2. le milieu de [AE] :

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_E}{2} = \frac{-1 + (-1)}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \\ \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{3 + (-4)}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

le milieu de [CK] :

$$\begin{cases} \frac{x_C + x_K}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \\ \frac{y_C + y_K}{2} = \frac{-2 + 1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc [AE] et [CK] ont même milieu.

(en justifiant de plus que les points A, E et K ne sont pas alignés $\Rightarrow$ ACEK est un quadrilatère)

on conclut que ACEK est un parallélogramme.

3) a) on a $\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{AB} - 3\vec{OI}$

$$\text{or } \vec{AB} \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ -1 - 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \vec{AB} = 6 \vec{OI} - 4 \vec{OJ}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \vec{OD} &= \frac{1}{2} (6 \vec{OI} - 4 \vec{OJ}) - 3 \vec{OI} \\ &= 3 \vec{OI} - 2 \vec{OJ} - 3 \vec{OI} \\ &= -2 \vec{OJ} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } D(0; -2)$$

3.b) $A(-1; 3)$; $B(5; -1)$; $D(0; -2)$

* vérifions que A, B et D ne sont pas alignés.

$$\text{on a } \vec{AD} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AB} \begin{pmatrix} 0+1 \\ -2-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{6}{1} = 6 \text{ et } \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \left(\begin{array}{l} 6 \times 5 = 30 \\ 1 \times (-4) = -4 \neq \end{array} \right)$$

d'où $\vec{AD}$ et $\vec{AB}$ ne sont pas colinéaires.

Donc A, B et D forment un triangle.

$$* AB = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$AD = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$BD = \sqrt{(5-0)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

on a $AD = BD = \sqrt{2b}$ d'où ABD est isocèle en D

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = 52 \\ AD^2 + BD^2 = 2b + 2b = 52 \end{array} \right\} AB^2 = AD^2 + BD^2$$

Donc d'après la réciproque de th. de Pythagore
 ABD est aussi rectangle en D .

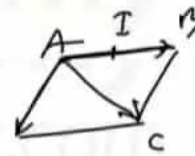
EXERCISE 04

Soit $ABCD$ un parallélogramme, I le milieu de $[AB]$ et E le point tel que :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DI}. \text{ (sans faire la figure)}$$

1. Prouver que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$
2. En déduire que les points A , C et E sont alignés.
3. On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$
 - a. Donner dans ce repère les coordonnées des points A , C et E .
 - b. Retrouver le résultat de question (2)

$$\begin{aligned} 1) \quad \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} \quad \left(\begin{array}{l} \text{d'après c)} \\ \text{d'après h.c)} \end{array} \right) \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DI} \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AI} \\ &= \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{I} &= A + B \\ \Rightarrow \overrightarrow{AI} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \vec{AD} + \frac{1}{3} \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{AE} = \frac{1}{3} (\vec{AD} + \vec{AB})}$$

2) on a $ABCD$ est un parallélogramme

$$\downarrow \text{on } \vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AC}$$



$$\text{et alors } \vec{AE} = \frac{1}{3} (\vec{AD} + \vec{AB}) = \frac{1}{3} \vec{AC}$$

$\downarrow$ on $\vec{AE}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires

et alors $(AE) \parallel (AC)$

et comme elles ont un point commun A

alors $\boxed{A, E \text{ et } C \text{ sont alignés}}$

3) $(A; \underline{\vec{AB}}, \underline{\vec{AD}})$

a) $\boxed{A(0, 0)}$

$C(?)$. cherchons $\vec{AC}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.

$$\text{on a } \vec{AC} = 1 \underline{\vec{AB}} + 1 \underline{\vec{AD}} \quad \text{donc } \boxed{C(1, 1)}$$

$$E(?) \text{ on a } \vec{AE} = \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{AD}) \\ = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AD}$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

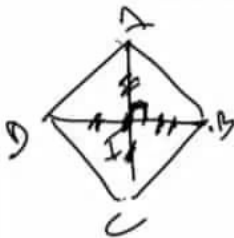
$$3.b) \text{ on a } \vec{AE} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{\frac{1}{3}}{1} \text{ donc } \vec{AE} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont colinéaires}$$

d'où $A, E \text{ et } C \text{ sont alignés.}$

Ex1: Ideé
I(1,0).

ABCD carré



3 pts non alignés.

ABCD est un # de centre I

ABD ou ABC ou BCD
rect. et isocèle.



IAB est rect. et isocèle en I.