

Système de deux équation à deux inconnues

$$\begin{cases} 2x - 5y = 12 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases}$$

est un système de deux équations à deux inconnues.

Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples (x, y) qui vérifient simultanément les deux équations



Autrement dit c'est trouver les solutions communes aux équations $(E_1; E_2)$

Résolution d'un système par substitution

Exemple

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - 2y = 3 & (E_1) \\ 4x + y = 30 & (E_2) \end{cases}$$

On exprime x en fonction de y dans (E_1) : $x = 2y + 3$ (E'_1)

On remplace x par $2y + 3$ dans $(E_2) \Leftrightarrow 4(2y + 3) + y = 30$

$$\Leftrightarrow 8y + 12 + y = 30$$

$$\Leftrightarrow 9y = 18$$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

On remplace y par 2 dans E_1 ou E_2

$$(E_1): x - 2y = 3$$

$$E_2: 4x + y = 30$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow 4x = 28$$

$$\Leftrightarrow x = 7$$

$$\Leftrightarrow x = 7$$

$$(E_1'): x = 2y + 3 \\ = 2 \times 2 + 3 \Leftrightarrow x = 7$$

On exprime y en fonction de x dans E_2 $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 3 \quad (E_1) \\ y = 30 - 4x \quad (E_2)' \end{array} \right.$
On remplace y par $30 - 4x$ dans E_1 $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 3 \quad (E_1) \\ 4x + y = 30 \quad (E_2) \end{array} \right.$

$$E_1: x - 2(30 - 4x) = 3 \Leftrightarrow x - 60 + 8x = 3 \\ \Leftrightarrow 9x = 63$$

$$\Leftrightarrow x = 7$$

On remplace x par 7 dans E_2'

$$y = 30 - 4x \\ = 30 - 4 \times 7 \Rightarrow y = 2$$

Vérification

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ 4x + y = 30 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 7 - 2 \times 2 = 3 : (E_1) \\ 4 \times 7 + 2 = 30 : (E_2) \end{array} \right.$$

Conclusion :

la solution du système est le couple (7 ; 2)

$$\hookrightarrow S = \{ (7; 2) \}$$

Résolution d'un système par combinaison

Exemple

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - 2y = 3 & (E_1) \\ 4x + y = 30 & (E_2) \end{cases}$$

Calcul de x :

élimination de Y

- On multiplie les deux membres de l'équation (E_2) par (-2)
- On soustrait membre à membre les équations puis on calcule x
- On recopie

$$\begin{cases} x - 2y = 3 & (E_1) \\ -8x - 2y = -60 & (E'_2) \end{cases} \quad \ominus$$

$$(E_1) - (E'_2) \Leftrightarrow (x - 2y) - (-8x - 2y) = 3 + 60$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + 8x + 2y = 63$$

$$\Leftrightarrow 9x = 63 \rightarrow x = 7$$

On remplace x par 7 dans (E_1) ou (E_2)

$$E_1: x - 2y = 3$$

$$\text{sig } 7 - 2y = 3$$

$$\text{sig } + 2y = 4$$

$$\text{sig } y = 2$$

$$E_2: 4x + y = 30$$

$$\Leftrightarrow 4 \times 7 + y = 30$$

$$\Leftrightarrow y = 30 - 28$$

$$y = 2$$

Calcul de y :

élimination de x

- On multiplie les deux membres de l'équation (E_1) par (-4)
- On additionne membre à membre les équations puis on calcule x
- On recopie

$$\begin{cases} -4x + 8y = -12 & (E'_1) \\ 4x + y = 30 & (E_2) \end{cases}$$

$$(E'_1) + (E_2) \Leftrightarrow (-4x + 8y) + (4x + y) = -12 + 30$$

$$\Leftrightarrow -4x + 8y + 4x + y = 18$$

$$\Leftrightarrow 9y = 18$$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

On remplace y par 2 dans (E_1) ou (E_2)

$$(E_2) : 4x + y = 30$$

$$\Leftrightarrow 4x = 30 - 2$$

$$\Leftrightarrow x = 7$$

Conclusion :

La solution du système est le couple $(7 ; 2)$

$$\hookrightarrow \mathcal{R}^1 = \{(7; 2)\}$$

Interprétation graphique

On commence par transformer les deux équations du système, de façon à les mettre sous la forme d'une équation de droite du type $y = ax + b$

$$\begin{cases} x - 2y = 3 & (E_1) \\ 4x + y = 30 & (E_2) \end{cases}$$

$$E_1: x - 2y = 3 \Leftrightarrow 2y = x - 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$E_2: 4x + y = 30 \Leftrightarrow y = -4x + 30$$

Dans un repère, on trace les deux droites correspondant à ces deux équations. (E_1) et (E_2)

Soit D_1 la droite d'équation: (E_1)

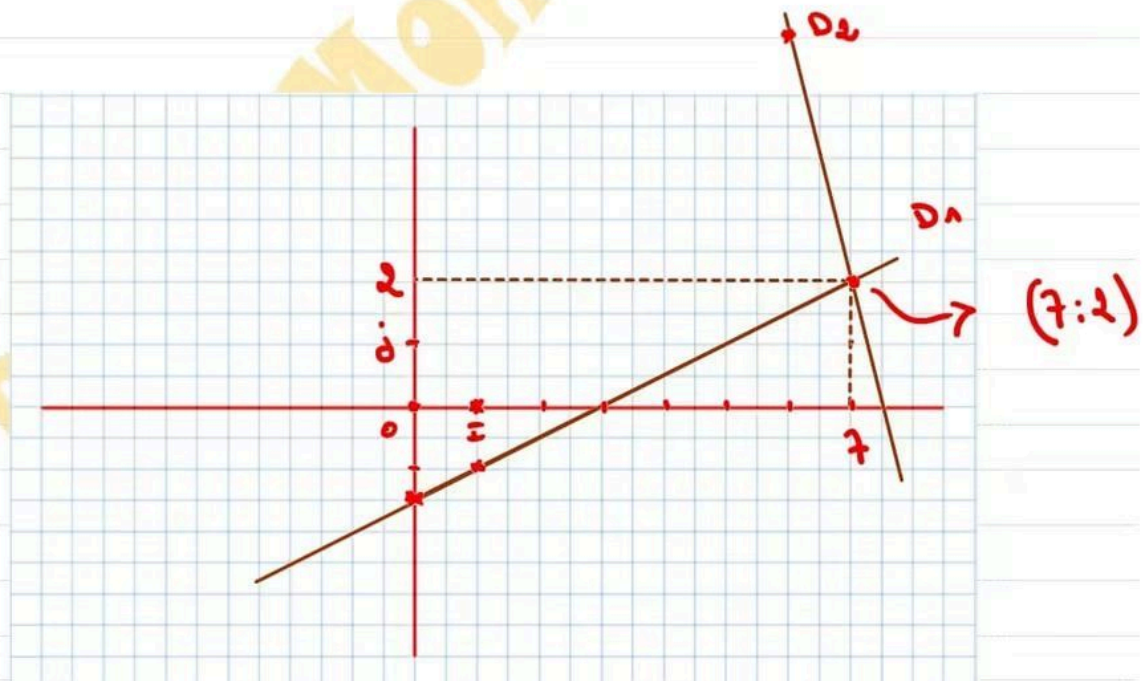
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

x	0	1
y	-1.5	-1

Soit D_2 la droite d'équation: (E_2)

$$y = -4x + 30$$

x	6	7
y	6	2



Les couples solutions de ce système $(7; 2)$ sont les coordonnées des points communs aux deux droites D_1 et D_2

$$\hookrightarrow S_{\mathcal{R}^2} = \{(7; 2)\}$$

Exercice N°: 1

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants par la méthode de substitution :

$$\begin{cases} 3x + y = 7 & (E_1) \\ 2x - 4y = 0 & (E_2) \end{cases}$$

$$E_1: 3x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - 3x \quad (E'_1)$$

$$E_2: 2x - 4(7 - 3x) = 0$$

$$\text{sig} : 2x - 28 + 12x = 0$$

$$\text{sig} \quad 14x = 28$$

$$\text{sig} \quad x = 2$$

$$(E'_1) : y = 7 - 3x \Leftrightarrow y = 7 - 6 \Leftrightarrow y = 1$$

$$\rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(2; 1)\}$$

$$\begin{cases} 7x - 2y = 1 & (E_1) \\ -x + 5y = 14 & (E_2) \end{cases}$$

$$E_2: -x + 5y = 14 \Leftrightarrow x = -14 + 5y \quad (E'_2)$$

$$E_1: 7(-14 + 5y) - 2y = 1$$

$$\Leftrightarrow -98 + 35y - 2y = 1$$

$$\Leftrightarrow 33y = 99 \Leftrightarrow y = 3$$

$$(E'_2) : x = -14 + 5y \Leftrightarrow x = -14 + 15$$

$$x = 1$$

$$\rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(1; 3)\}$$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant par la méthode d'élimination :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 10 & (E_1) \\ 4x + 5y = 3 & (E_2) \end{cases}$$

$$4(E_1) - 3(E_2) : 4(3x - 4y) - 3(4x + 5y) = 4 \times 10 - 3 \times 3$$

$$\text{soit } 12x - 16y - 12x - 15y = 31$$

$$\text{soit } -31y = 31 \Rightarrow y = -1$$

$$\text{Pour } y = -1 : (E_1) : 3x - 4y = 10$$

$$\text{soit } 3x + 4 = 10$$

$$\text{soit } 3x = 6$$

$$\Rightarrow x = 2$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}^2} = \{(2; -1)\}$$