

Exercice 1

Soit ABC un triangle rectangle en A tels que $\widehat{ABC} = 60^\circ$ et $AB = 3$

- 1) Recopier et compléter le tableau suivant par des valeurs exactes :

Angle	Cosinus	Sinus	Tangente
60°			

- 2) a) Exprimer $\tan(\widehat{ABC})$ en fonction de AC
 b) En déduire que $AC = 3\sqrt{3}$
 c) Déterminer BC
 3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC)
 a) Déterminer AH
 b) Déterminer BH

Exercice 2

Soit un triangle ABC tel que $BC = 4$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ et $\widehat{ACB} = 75^\circ$. Soit [CH] la hauteur issue de C.

- 1) a) Montrer que $BH = 2$
 b) Calculer CH
 2) a) Montrer que $\widehat{BAC} = 45^\circ$
 b) Calculer AH et AC

Exercice 3

- 1) Soit x un angle aigu tel que $\tan x = \frac{1}{2}$
 a) Montrer que $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
 b) Calculer alors $\cos x$ et $\sin x$
 2) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB] tel que $AB = 8$ et C un point de la tangente à $\mathcal{C}$ en B tel que $BC = 4$.
 Le segment [AC] coupe $\mathcal{C}$ en I
 a) Déterminer la nature du triangle ABI
 b) Montrer que $AC = 4\sqrt{5}$ puis calculer $\cos \widehat{BAC}$ et $\tan \widehat{BAC}$
 c) Calculer les distances AI et BI

Exercice 4

On considère un triangle ABC tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$

- 1) Soit H le pied de la hauteur issue de C
 a) Calculer les valeurs exactes des distances CH et AH
 b) En déduire la valeur de la distance BH
 2) Calculer la valeur exacte de la distance BC
 3) a) Calculer la valeur exacte de $\cos \widehat{ABC}$
 b) Donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ en degrés à 0.1° près
 c) En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{ACB}$

Exercice 5

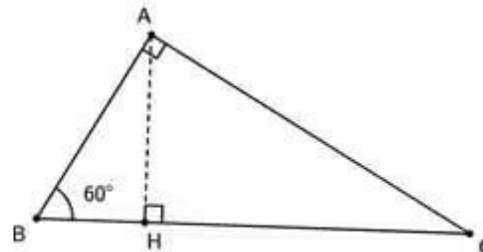
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 8$ et $\widehat{ABC} = 30^\circ$.

- 1) Calculer AB et AC
 2) On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Calculer les distances BH et AH.
 3) Soit K le point du segment [AB] tel que $AK = \frac{1}{4} AB$
 a) Montrer que les droites (HK) et (AC) sont parallèles.
 b) En déduire que le triangle AHK est rectangle en K.
 c) Calculer HK

Exercice 1

1)

Angle	Cosinus	Sinus	Tangente
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$



$$2) a) \tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{3}$$

$$b) \tan \widehat{ABC} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{AC}{3} \text{ donc } AC = 3\sqrt{3}$$

$$c) \cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{BC} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ donc } BC = 3 \times 2 = 6$$

3) a) Méthode 1 :

ABC est un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonale de A sur (BC) donc

$$AH \times BC = AB \times AC \text{ et par suite } AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{3 \times 3\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Méthode 2 :

$$\text{Dans le triangle rectangle ABH : } \sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } AH = AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Méthode 1 :

ABC est un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonale de A sur (BC) donc $AB^2 = BH \times BC$

$$\text{donc } BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Méthode 2 :

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABH :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \text{ donc } BH^2 = AB^2 - AH^2 = 9 - \frac{27}{4} = \frac{9}{4} \text{ donc } BH = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

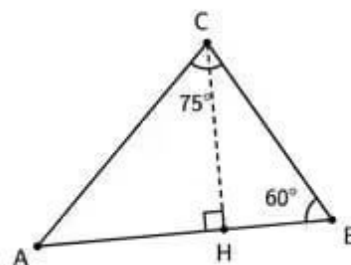
Méthode 3 :

$$\text{Dans le triangle rectangle ABH : } \cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ donc } BH = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$$

Méthode 4 :

$$\text{Dans le triangle rectangle ABH : } \tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \text{ donc } BH = \frac{AH}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}$$

Exercice 2



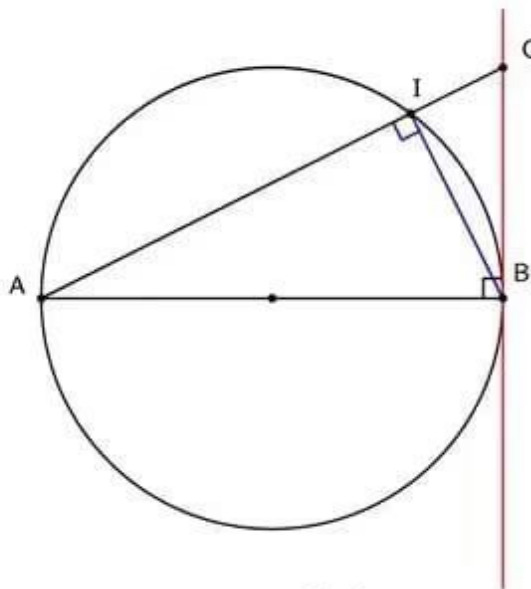
$$1) a) \text{ Dans le triangle BCH rectangle en H, } \cos \widehat{CBH} = \frac{BH}{BC}$$

$$\text{donc } BH = BC \times \cos \widehat{CBH} = 4 \times \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

- b) Dans le triangle BCH rectangle en H, $\sin \widehat{CBH} = \frac{CH}{BC}$
 donc $CH = BC \times \sin \widehat{CBH} = 4 \times \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$
- 2) a) Dans le triangle ABC : $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ$
 donc $\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$
- b) Dans le triangle ACH rectangle en A :
 $\rightarrow \sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{AC}$ donc $AC = \frac{CH}{\sin \widehat{CAH}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$
 $\rightarrow \tan \widehat{CAH} = \frac{CH}{AH}$ donc $AH = \frac{CH}{\tan \widehat{CAH}} = \frac{2\sqrt{3}}{\tan 45^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{1} = 2\sqrt{3}$

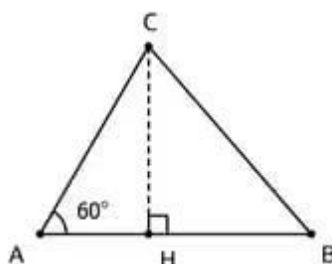
Exercice 3

- 1) a) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
 donc $1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
- b) $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ donc $\cos^2 x = \frac{4}{5}$ et par suite $\cos x = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$
 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ donc $\sin x = \tan x \cos x = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$
- 2)



- a) ABI est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ dont un diamètre est [AB] donc ABI est rectangle en I
- b) $\rightarrow$ (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B donc (BC) $\perp$ (AB) et par suite ABC est un triangle rectangle en B.
 donc d'après le théorème de Pythagore $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 4^2 = 80$
 et par suite $AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
 $\rightarrow$ Dans le triangle rectangle ABC :
 $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$
 $\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
- c) Dans le triangle rectangle ABI :
 $\rightarrow \cos \widehat{BAC} = \cos \widehat{BAI} = \frac{AI}{AB}$ donc $AI = AB \times \cos \widehat{BAC} = 8 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$
 $\rightarrow \tan \widehat{BAC} = \tan \widehat{BAI} = \frac{BI}{AI}$ donc $BI = AI \times \tan \widehat{BAC} = \frac{16}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{\sqrt{5}}$

Exercice 4



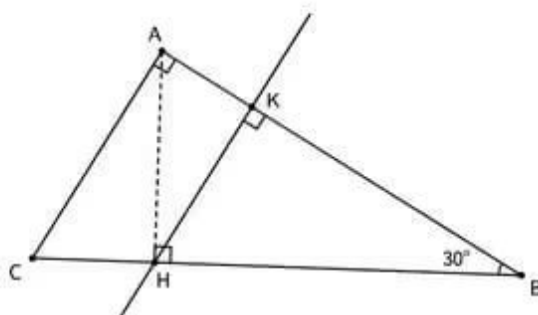
- 1) a) ACH est un triangle rectangle en H donc :

$$\rightarrow \sin 60^\circ = \sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{AC} \text{ donc } CH = AC \times \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \cos 60^\circ = \cos \widehat{CAH} = \frac{AH}{AC} \text{ donc } AH = AC \times \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$
- b) $BH = AB - AH = 5 - 2 = 3$
- 2) BCH est un triangle rectangle en H donc d'après Pythagore,

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 3^2 + (2\sqrt{3})^2 = 9 + 12 = 21$$
 donc $BC = \sqrt{21}$
- 3) a) BCH est un triangle rectangle en H donc $\cos \widehat{ABC} = \cos \widehat{HBC} = \frac{BH}{BC} = \frac{3}{\sqrt{21}}$
- b) $\widehat{ABC} = 49,1^\circ$
- c) Dans le triangle ABC, $\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$
 donc $\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{CAB} - \widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ - 49,1^\circ = 70,9^\circ$

Exercice 5



- 1) Dans le triangle ABC rectangle en A :

$$\rightarrow \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \text{ donc } AC = BC \times \sin \widehat{ABC} = 8 \times \sin 30^\circ = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

$$\rightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} \text{ donc } AB = BC \times \cos \widehat{ABC} = 8 \times \cos 30^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$
- 2) Dans le triangle ABH rectangle en H :

$$\rightarrow \sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} \text{ donc } AH = AB \times \sin \widehat{ABH} = 4\sqrt{3} \times \sin 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} \text{ donc } BH = AB \times \cos \widehat{ABH} = 4\sqrt{3} \times \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$
- 3) a) $AK = \frac{1}{4} AB$ donc $BK = AB - AK = AB - \frac{1}{4} AB = \frac{3}{4} AB$ et par suite $\frac{BK}{BA} = \frac{3}{4}$
 $\frac{BK}{BA} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{BH}{BC}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès $(AC) \parallel (KH)$
- b) $(AC) \parallel (KH)$ et $(AC) \perp (AB)$ donc $(HK) \perp (AB)$ et par suite AHK est rectangle en K.
- c) **Méthode 1 :**
 AHB est un triangle rectangle en H et [HK] est la hauteur issue de H donc $AH \times BH = HK \times AB$
 donc $HK = \frac{AH \times BH}{AB} = \frac{2\sqrt{3} \times 6}{4\sqrt{3}} = 3$

Méthode 2 :

Dans le triangle BHK rectangle en K, $\sin \widehat{HBK} = \frac{HK}{BH}$

$$\text{donc } HK = BH \times \sin \widehat{HBK} = 6 \times \sin 30^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

Méthode 3 :

Dans le triangle BHK rectangle en K, $\tan \widehat{HBK} = \frac{HK}{BK}$

$$\text{donc } HK = BK \times \tan \widehat{HBK} = \frac{3}{4} AB \times \tan 30^\circ = \frac{3}{4} \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3$$

Méthode 4 :

BHK est un triangle rectangle K donc d'après le théorème de Pythagore $BH^2 = HK^2 + BK^2$

$$\text{donc } HK^2 = BH^2 - BK^2 = 6^2 - \left(\frac{3}{4} AB\right)^2 = 36 - \left(\frac{3}{4} \times 4\sqrt{3}\right)^2 = 36 - 27 = 9$$

$$\text{et par suite } HK = \sqrt{9} = 3$$