

ACTIVITES NUMERIQUES I

I/DIVISION EUCLIDIENNE

Activités D'approche

Pour un jeu, chaque joueur reçoit le même nombre de cartes. Si l'on répartit 52 cartes.

1°/ Entre deux joueurs :

- Toutes les cartes sont-elles distribuées ?
- Calcule combien de cartes reçoit chaque joueur ?

2°/ Entre trois joueurs :

- Toutes les cartes sont-elles distribuées ?
- Calcule combien de cartes reçoit chaque joueur ?

3°/ Continue ainsi jusqu'à six joueurs et écris tes réponses dans le tableau qui suit

Nombres de joueurs	Nombres de cartes distribuées	Cartes restantes	le nombre de cartes reçues pour chaque joueur	vérifier si le jeu de cartes est complet
2	52	0	$\frac{52}{2} = 26$	$26 \times 2 = 52$
3	51	1		
4				
5				
6				

4°/ Après avoir distribué toutes les cartes entre les joueurs, est-il possible que le reste de cartes non distribuées soit supérieur au nombre de joueurs ?

Définition Division Euclidienne

Soit a et b désignent deux entiers naturels, avec $b \neq 0$.

Effectuer la division euclidienne de a par b signifie déterminer deux nombres entiers naturels q et r qui vérifient : $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.

- a s'appelle le dividende.
- b s'appelle le diviseur
- q s'appelle le quotient de la division euclidienne.
- r s'appelle le reste de la division euclidienne

EXEMPLE

$$\begin{array}{r|l}
 \text{dividende} \rightarrow 488 & \text{diviseur} \leftarrow b \\
 - 484 & 11 \\
 \hline
 \text{reste} \rightarrow 4 & q \leftarrow \text{quotient}
 \end{array}$$

Attention

il y'a une condition sur le reste dans l'écriture $a = b.q + r$ pour que cette dernière représente une division euclidienne

l'égalité $a = b.q + r$ représente une division euclidienne de a par b que si

Exemple

▪ $254 = 8 \times 31 + 6$

Dans la division euclidienne de 254 par 8 le quotient est et le est 6

▪ $573 = 11 \times 51 + 12$

l'égalité $573 = 11 \times 51 + 12$ ne représente pas une
de 573 par 11 car

Exercice d'application résolu n°1

Trouver tous les entiers naturels dont le quotient dans la division euclidienne par 4 donne un quotient égal à 3 fois le reste

Correction

Soit a un entier naturel qui vérifie la condition de l'énoncé. On divise a par 4, on a alors :

$a = 4q + r$ avec $0 \leq r < 4$.

Comme $q = 3r$, on a : $a = 12r + r = 13r$ avec $0 \leq r < 4$

On trouve toutes les valeurs de a en faisant varier r de 0 à 3 compris,

on a alors l'ensemble solution : $S = \{0 ; 13 ; 26 ; 39 ; 52\}$.

EXERCICES

1) Compléter le tableau suivant

$a = b.q + r$	dividende	diviseur	quotient	le reste
$322 = 10 \times 31 + 12$				
$135 - 10 \times 13 = 5$				

2) Dans chacun des cas suivants, calcule x et précise s'il représente le dividende, le diviseur, le quotient ou le reste d'une division euclidienne

$21.x + 20 = 83$

$5 \times 27 + x = 137$

$x \cdot 2 + 5 = 17$

$x = 17 \times 3 + 2$

$x = \dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots$

x est

x est

x est

x est

3) Lors d'une division euclidienne, si on augmente le dividende a de 73 et le diviseur b de 6, on constate que le quotient q ne change pas et le reste r augmente de 1.

a) Quel est ce quotient q ?

b) Chercher le dividende a si $a < 130$ et $r = 9$

4) La somme de deux nombres entiers est égale à 1999. Dans la division euclidienne du plus grand par le plus petit, le quotient est égal à 5 et le reste est égal à 7. Quels sont ces deux nombres entiers ?

5) Dans la division euclidienne de l'entier naturel x par 7, le reste est égal à 4.

Dans la division euclidienne de l'entier naturel y par 7, le reste est égal à 6.

- a) Quel est le reste obtenu dans la division euclidienne de $x + y$ par 7 ?
 - b) Quel est le reste obtenu dans la division euclidienne de $9x$ par 7 ?
 - c) Quel est le reste obtenu dans la division euclidienne de x^2 par 7 ?
- 6) Dans une division euclidienne, on multiplie le dividende et le diviseur par un même entier naturel non nul. Que deviennent alors le quotient et le reste ?
- 7) Soit n un entier naturel tel que : $2n + 11 = 2(n+3) + 5$
Déterminer selon le reste de la division euclidienne de $(2n + 11)$ par $2(n+3)$

II. DIVISEURS ET MULTIPLES

ACTIVITE

Compléter les phrases en utilisant convenablement les mots « **diviseur** » ou « **multiple** »

- 75 est un;.....de 5
- 3 est unde 36
- 54 est unde 9
- 5 est un.....de 250

Définition

a et b désignent des entiers naturels avec $b \neq 0$.

Dire que b est un diviseur de a signifie que le reste de la division euclidienne de a par b est nul c'est-à-dire que $a = b \times q$ avec $q \in \mathbb{N}$.

Vocabulaire :

On dit aussi que b divise a ou que a est divisible par b ou que a est un multiple de b

EXERCICE

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifié

soit n un entier naturel

- * $18n$ est multiple de 6.....car
- * 259 est divisible par 7car.....
- * 11111 est un multiple de 37car.....
- * $n^5 - n$ est divisible par $n^2 + 1$ car.....
- * $25^5 - 5^{48}$ est divisible par 25car.....
- * 1111111111 est multiple de 123 456 789car.....

Exercice d'application résolu n°2

Lorsqu'on divise l'entier naturel a par l'entier naturel b , le reste est 8 et lorsqu'on divise $2a$ par b , le reste est 5. Déterminer le diviseur b .

Correction

Écrivons chacune des deux divisions euclidiennes, en notant q et q' les quotients

$$\text{respectifs : } \begin{cases} a = bq + 8 & \text{avec } b > 8 \\ 2a = bq' + 5 & \text{avec } b > 5 \end{cases}$$

En multipliant la première division par 2 et en égalisant avec la deuxième, on obtient

$$2bq + 16 = bq' + 5 \quad \text{avec } b > 8$$

$$\text{équivalent à } b(2q - q') = -11$$

$$\text{équivalent à } b(q' - 2q) = 11$$

b est donc un multiple positif non nul de 11, supérieur à 8, donc : $b = 11$.

ENTIER PAIRE - ENTIER IMPAIRE

On dit que n un entier paire si n s'écrit sous la forme $n=2.p$ avec p entier naturel

On dit que n un entier impaire si n s'écrit sous la forme $n=2.p+1$ avec p entier naturel

EXERCICES

- 1) Montrer que le produit de deux entiers paires est divisible par 4
- 2) Montrer la somme de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 3
- 3) Montrer que la somme de trois entiers consécutifs impaire est divisible par 3

Définition :

a et b étant deux nombres entiers positifs, tel que b non nul

le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre entier naturel si b est un diviseur positif de a

EXERCICE

- 1) Comment faut il choisir entier naturel n pour que $\frac{8}{n-2}$ soit un entier naturel
- 2) Vérifier que $\frac{4n}{n-2} = 4 + \frac{8}{n-2}$ pour tout $n \neq 2$
- 3) Comment faut il choisir entier n pour que $\frac{4n}{n-2}$
- 4) Comment faut il choisir entier naturel n pour que $\frac{n}{2}$ et $\frac{8}{n-2}$ soient entiers

III. CRITERE DE DIVISIBILITE

Activité

Compléter le tableau suivant en écrivant Oui ou Non

Le nombre ... est divisible par :	2	3	5	9	10	25
230						
1 431						
3 402						
422						
414						
102						
780						
2 125						
143						

Divisibilité par 2	Un nombre est divisible par 2 si son dernier chiffre est divisible par 2.	1 274 est divisible par 2, car 4 est divisible par 2.
Divisibilité par 3	Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.	294 est divisible par 3, car $2 + 9 + 4 = 15$ et 15 est divisible par 3.
Divisibilité par 4	Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.	12 620 est divisible par 4, car 20 est divisible par 4.
Divisibilité par 5	Un nombre est divisible par 5 si il se termine par un 0 ou un 5.	37 956 095 est divisible par 5, car il se termine par un 5.
Divisibilité par 6	Un nombre est divisible par 6 si il est divisible par 2 et 3	3 312 est divisible par 6, car il est pair et la somme de ses chiffres $3 + 3 + 1 + 2 = 9$ et 9 est divisible par 3.
Divisibilité par 9	Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.	945 est divisible par 9, car $9 + 4 + 5 = 18$ et 18 est divisible par 9.
Divisibilité par 10	Un nombre est divisible par 10 si il se termine par 0.	6 680 est divisible par 10, car il se termine par un 0.
Divisibilité par 12	Un nombre est divisible par 12 si il est divisible par 3 et 4	840 540 est divisible par 12, car il est divisible par 3 et 4
Divisibilité par 15	Un nombre est divisible par 15 si il est divisible par 3 et 5	6 480 est divisible par 15, car il est divisible par 3 et 5.

EXERCICE

- 1) Déterminer les entiers x et y pour que le nombre $5x6y$ soit divisible par 9 et 4
- 2) Déterminer le réel x pour que le entier $132x$ soit divisible par 12
- 3) Déterminer le réel a et b pour que le nombre $3a7b$ soit divisible par 15

IV. Nombres premiers-PGCD-PPCM

1. Nombre premier

Activité 1.11.

Donner la liste des diviseurs de chacun des entiers suivants : 5; 13; 29 et 47

Définition

Un entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs 1 et lui même

Remarque

- Le nombre 1 n'est pas premier
- 2 est l'unique nombre premier pair

Crible d'Eratosthène

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

.....
.....

La décomposition en facteurs premiers

Décomposer un nombre en facteur premier signifie qu'il faut transformer le nombre en un produit de plusieurs facteurs qui sont tous premiers (s'il y a des facteurs similaire il faudra alors utiliser les puissances).

Exemple : $12 = 2.2.3 = 2^2.3$

Méthode :

Pour décomposer un nombre en facteur premier il faut le diviser par les facteurs premiers les plus petits possible jusqu'à obtenir 1.

162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$162 = 2.3.3.3.3 = 2.3^4$$

4158	

$$4158 =$$

Remarque :

- On n'a pas besoin de diviser par les facteurs premiers dans l'ordre, mais dans la factorisation première on les range toujours par ordre croissant !
- La factorisation première d'un entier est **utile pour déterminer ses diviseurs** et le **nombre de ses diviseurs**

2. Diviseurs communs à 2 entiers

Définition a , b et k désignent des entiers naturels avec $k \neq 0$.

Dire que k est un diviseur commun à a et b signifie que k divise à la fois a et b .

Exemple

diviseurs de 12 . diviseurs de 18

1	12
2	6
3	4

1	18
2	9
3	6

Les diviseurs communs à 12 et 18 sont : 1, 2, 3, 6.

diviseurs de 45 . diviseurs de 28

1	45
3	15
5	9

1	28
2	14
4	7

1 est le seul diviseur commun à 45 et 28

Définition. Deux entiers naturels a et b sont dits **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun est 1.

Conséquence. Deux entiers naturels sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont aucun diviseur **premier** commun.

Exemple

$35 = 5 \cdot 7$ et $12 = 2^2 \cdot 3$ sont premiers entre eux car n'ont aucun diviseur **premier** commun.

a) Notation et définition de PGCD

Activité 1.6.

- 1/ a) Ecrire la liste de tous les diviseurs du nombre 36
 - b) Ecrire la liste de tous les diviseurs du nombre 54 .
 - c) Déterminer la liste des diviseurs communs de 36 et 54.
- 2/ Déterminer le plus grand élément de cette liste

CORRECTION

On désigne par D_a = ensemble de diviseurs de l'entier a

- a) $36 = 2^2 \cdot 3^2$ d'où $D_{36} = \{1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36\}$
- b) $48 = 2^4 \cdot 3$ d'où $D_{48} = \{1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48\}$
- c) L'ensemble de diviseurs communs de 36 et 48

est noté $D_{36} \cap D_{48} = \{1 ; 2 ; 4 ; 6 \text{ et } 12\}$

12 est le plus grand diviseur commun de 36 et 48, on l'appelle **plus grand commun diviseur (PGCD)** de 36 et 48 On note $\text{PGCD}(36 ; 48) = 12$

Définition

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs. Le plus grand commun diviseur des nombres a et b s'appelle le **PGCD** des nombres a et b. On le note : $\text{PGCD}(a; b)$

b) Recherche du PGCD

1) Méthode de décomposition en facteur premiers

Exemple 1 : $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $b = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$

d'où le $\text{PGCD}(a, b) = 2^2 \times 3 = 12$

Application Trouver le $\text{PGCD}(70 ; 84)$

70

84

.....

.....

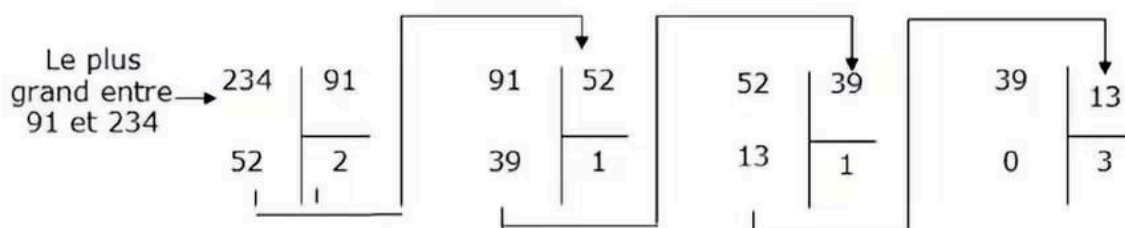
$\text{PGCD}(70 ; 84) = \dots\dots\dots$

Règle : Le pgcd de plusieurs entiers naturels est le produit de leurs **diviseurs premiers communs**, affectés chacun du **plus petit des exposants** apparaissant dans les factorisations premières respectives

2) Méthode Algorithme d'Euclide

Cet algorithme est expliqué ci-dessous, par 3 exemples

Exemple 1 : On recherche le PGCD de 91 et 234 :

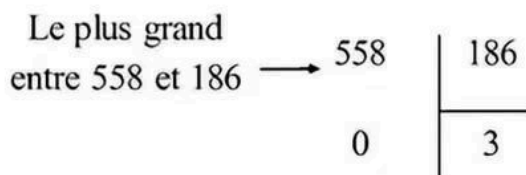


L'algorithme se termine lorsque l'on obtient pour reste 0.

Le PGCD est alors le dernier reste non nul.

Dans cet exemple, on obtient 13 pour PGCD de 91 et 234

Exemple 2 : on recherche le PGCD de 558 et 186 :



Dès la première division, on obtient comme reste 0.

Cela signifie que le PGCD de 558 et 186 est 186 lui-même.

EXEMPLE 3

Déterminer le PGCD de 252 et 360.

On applique l'algorithme d'Euclide :

$$360 = 252 \times 1 + 108 \quad (\text{On divise 360 par 252})$$

$$\dots\dots = \dots\dots \times 2 + \dots\dots \quad (\text{On divise 252 par 108})$$

$$\dots\dots = \dots\dots \times 3 + \dots\dots \quad (\text{On divise 108 par 36})$$

Le dernier reste non nul est 36 donc $\text{PGCD}(252; 360) = 36$.

Remarque importante

L'Algorithme d'Euclide, nous permet aussi de démontrer si deux nombres sont premiers entre eux (ou non).

APPLICATION

Utilise l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 1360 et 560

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété.

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs.

1. $\text{PGCD}(a; a) = a$
2. $\text{PGCD}(a; 1) = 1$
3. $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; a)$
4. Si b est un diviseur de a , alors $\text{PGCD}(a; b) = b$
5. L'ensemble des diviseurs communs de a et b est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD
6. $\text{PGCD}(a, b) = 1$ signifie que a et b sont **premiers entre eux**
7. Soit $d = \text{PGCD}(a, b)$; il existe deux entiers naturels a' et b' premiers entre eux. tel que $a = d.a'$ et $b = d.b'$

APPLICATION

1°/ Déterminer : $\text{PGCD}(125 ; 125)$; $\text{PGCD}(432 ; 1)$ et $\text{PGCD}(520 ; 10)$

2°/ Soit $a = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et $b = 3 \times 5^2 \times 7^2$

a) Déterminer $\text{PGCD}(a ; b)$

b) En déduire $D_a \cap D_b$ ensemble de diviseurs communs de a et b

5°/ Déterminer $\text{pgcd}(23456780, 111)$

6°/ Déterminer les naturels dont la somme est 600 et dont le PGCD est 50

EXERCICE.

a) Calculer le PGCD de 1078 et de 322

b) Calculer le PGCD de 67 et de 100.

c) Calculer le PGCD de 9 et de 111 111 111 111.

d) Déterminer le PGCD de $2n+9$ et $n+4$

e) Soit p un nombre premier et $1 \leq n < p$ un nombre entier.

Montrer que n et p sont premiers entre eux.

f) Déterminer les entiers naturels p tels que $\text{PGCD}(120; p) = 15$ et $p < 100$

6 Fraction irréductible

Activité 1.13.

1. Calculer $\text{PGCD}(60; 156)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide

2. Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{156}$

Définition. Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

- a et b désignent des nombres entiers positifs, avec $b \neq 0$.

La fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si et seulement si $\text{PGCD}(a; b) = 1$

Application : Rendre la fraction $\frac{1078}{322}$ irréductible

Notation et définition de PPCM

Activité d'introduction

Un père et son fils vont se promener.

Le père fait des enjambées de 80cm, tandis que son fils en fait de 50cm.

- Représente cette situation sur deux droites graduées :

Père : _____

fil : _____

- Après combien de mètres poseront-ils le pied au même endroit ?

.....

Cela représente combien de pas pour le père ? et combien pour fils ?

.....

Définition

- Un multiple commun à deux entiers naturels a et b est un naturel qui est un multiple commun de a et b .
- L'ensemble des multiples communs à a et b possède un plus petit commun multiple non nul noté PPCM

APPLICATION

- Déterminer la liste :
 - des six premiers multiples positifs de 18.
 - des quatre premiers multiples positifs de 30.
- En déduire le plus petits des multiples communs strictement positif de 18 et 30 noté PPCM(18 ;30)

Recherche de PPCM par décomposition en facteurs premiers

EXEMPLE

1960	2	1232
980	2	
490	2	
245	5	
49	7	
7	7	
1		

1960=..... 1232=.....

PPCM(1960 ; 1232) =

Règle : Le ppcm de deux entiers naturels est le produit de tous les **diviseurs premiers** apparaissant dans les factorisations premières respectives, chacun étant affecté du **plus grand des exposants**.

EXERCICE

1. 180

420

2. 550

1 500

PPCM(180 ; 420) =

PPCM(550 ; 1500) =

2. Complète le tableau suivant

a	b	PGCD (a,b)	PPCM (a,b)	a . b	PGCD (a,b) . PPCM (a,b)
8	16				
6	15				
24	36				
60	100				
90	405				

Retenons .

a et b deux entiers naturels non nuls. On a: $a \times b = \text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b)$

EXERCICES

1°/ a) Calculer PGCD(17640 ; 411600) à l'aide de l'algorithme d'Euclide .

b) En déduire PPCM(17640 ; 411600).

2°/ On donne $A = 2^x \times 3^2 \times 5$ et $B = 2^{2x} \times 3 \times 5^2$,

Déterminer la valeur de x sachant que PPCM(A; B) contient 45 diviseurs .

Propriété.

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs.

1. Si b est un diviseur de a, alors $\text{PPCM}(a; b) = a$

2. L'ensemble des multiples communs à a et b est l'ensemble des multiples de leur PPCM

3. Si a et b sont **premiers entre eux** alors $\text{PPCM}(a; b) = a.b$

4. Soit $m = \text{PPCM}(a, b)$; il existe deux entiers naturels k et k' premiers entre eux. tel que $m = k . a = k' . b$