

I/ Règles de Calculs

1°/ Activité

1°/ Calculer : $A = \left(1 - \frac{1}{20}\right) \times \left(1 - \frac{2}{20}\right) \times \left(1 - \frac{3}{20}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{60}{20}\right)$

2°/ Calculer : $B = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{10}\right)$

3°/ a) On pose $U = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 10$. Calculer U

b) En déduire $U' = \left(1 - \frac{1}{10}\right) + \left(1 - \frac{2}{10}\right) + \left(1 - \frac{3}{10}\right) + \dots + \left(1 - \frac{9}{10}\right)$

c) On pose

$$V = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{10}\right) U + \left(1 - \frac{1}{10}\right) \times \left(1 - \frac{1}{11}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{18}\right) \times 2U'$$

Exprimer V en fonction de U' puis calculer V

4°/ On pose $I = 110 + 120 + 130 + 140 + \dots + 200$.

et $J = 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + \dots + 100$

Exprimer I et J en fonction de U puis calculer I et J

5°/ a) Montrer pour tout entier n nul n on a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

b) Calculer alors la somme $S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2 \times 3} \times \frac{1}{3 \times 4} \times \frac{1}{4 \times 5} \times \dots \times \frac{1}{98 \times 99} \times \frac{1}{99 \times 100}$.

Ordre de priorité dans les calculs

Règle 1 : On effectue en priorité les opérations situées entre parenthèses.

Règle 2 : En absence de parenthèses, on effectue en priorité les multiplications et les divisions. A l'intérieur des parenthèses, on effectue les multiplications et les divisions puis les additions et les soustractions.

2°/ Règle de calcul sur les puissances

Pour tous réels non nuls a et b et pour tous entiers m et n ; on a :

• $a^m \times a^n = a^{m+n}$	• $\left(\frac{1}{a}\right)^n = a^{-n}$
• $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	• $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
• $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	• $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

3°/ Exercices d'application

EXERCICE 1

Simplifier les expressions suivantes :

$$1^{\circ}/ A = \frac{2^3 \times 20 \times 10^2}{(-5)^4 \times 16} ; B = \frac{0,16 \times (3 \times 10^{-4})^2}{4 \times 10^{-4}} ; C = \frac{(a^{-3}b^2)^2 (2^{-3}a^5b^2c^{-2})^3}{(2^{-3}a^3c^{-2})^3}$$

2°/ a, b et c sont des nombres non nuls. Ecrire les nombres suivants sous la forme $a^p \times b^q \times c^r$

$$a) M = \frac{c}{(\frac{a}{b})^2} ; N = a^5 \times (bc)^2 \cdot \frac{1}{(a^3b)^2} ; I = \frac{a b^2}{c a^{-2}} \text{ et } J = (a^3 b^{-5})^2$$

b) Calculer le produit $M \times N \times I \times J$ si $a = b$ et $c = 10^3$

EXERCICE 2 Une somme de puissances de 2

1°/ a) Vérifie, à l'aide de calculs, que les égalités suivantes sont vraies.

$$2^0 = 2^1 - 2^0 ; 2^1 = 2^2 - 2^1 ; 2^2 = 2^3 - 2^2.$$

b) En utilisant les propriétés sur les puissances,

montre l'égalité $2^n = 2^{n+1} - 2^n$ où n est un nombre entier naturel

c) En utilisant l'égalité prouvée en b., vérifie que $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1$

2°/ En t'inspirant du raisonnement de la question c., et sans utiliser de calculatrice, trouver la valeur exacte des sommes suivantes. $A = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{300}$

3°/ Exprime en justifiant à l'aide d'une somme ayant le moins de termes possible l'expression $S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n$

EXERCICE 3

1°/ Comparer

$$a) 2^2 + 2 \text{ et } 2^3 - 3 ; b) 3^2 + 3 \text{ et } 4^3 - 4 ; c) 4^2 + 4 \text{ et } 5^3 - 5 ; d) 10^2 + 10 \text{ et } 11^3 - 11$$

2°/ Emettre une conjecture puis la Démontrer

II /Les racines carrées

1/ Définition

On appelle racine carrée d'un nombre réel positif

le nombre noté $\sqrt{a}$ tel que : $\sqrt{a}^2 = a$

■ $\sqrt{a}$ se lit racine carrée de a

■ le symbole $\sqrt{}$ est le radical

2/ Propriétés

- pour tout $a \geq 0$: $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$ et pour tout $n > 0$, $\sqrt{a^n} = \sqrt{a^n}$
- pour tous réels $a \geq 0$, $b \geq 0$: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- pour tous réels $a \geq 0$, $b > 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Pour tout réel c , $\sqrt{c^2} = |c|$

■ pour tous réels $a \geq 0$, $b > 0$: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exemple $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
 $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$

Exemple 1

a) $\sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$; b) $\sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{242}}{\sqrt{22}} = \frac{\sqrt{2 \times 121}}{\sqrt{2 \times 11}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{121}}{\sqrt{2} \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{2} \times 11}{\sqrt{2} \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11} \sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$; d) $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}|$

Attention On ne peut regrouper que des racines carrées identiques.

Exemple 2 : $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$; $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = -\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$

3°/ Distributivité avec les racines carrées

Lorsque l'on effectue le produit d'une somme de racines carrées, on ne peut que distribuer pour effectuer le calcul.

Exemple : $(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{18} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$
 $= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

EXERCICE

1°/ Calculer $A = \sqrt{25} \cdot \sqrt{980}$; $B = \sqrt{500} \cdot \sqrt{384}$

2°/ Ecrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ ou a et b deux entiers naturels dont b est le plus petit possible

$C = 3\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{72}$; $D = 4\sqrt{54} + 3\sqrt{96} - 7\sqrt{216}$

3°/ Ecrire sans radicaux le nombres suivants $\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{91}}{\sqrt{75}}$; $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$; $\sqrt{2019^6}$

Méthode pour rendre entier un dénominateur comportant une racine carrée

Exemple : Ecrire les fractions sans racine carrée au dénominateur:

$$A = \frac{6}{\sqrt{15}} \quad ; \quad B = \frac{3}{2+\sqrt{3}} \quad ; \quad C = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

Méthode 1 : si Le dénominateur est d'une fraction ne contient qu'une racine $\sqrt{a}$:
on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}$,

Exemple $A = \frac{6}{\sqrt{15}} = \frac{6\sqrt{15}}{\sqrt{15}\sqrt{15}} = \frac{6\sqrt{15}}{15} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$

Méthode 2 : si Le dénominateur est une somme dont les termes contiennent une racine

- i) Si le dénominateur s'écrit de la forme $a + \sqrt{b}$,
on multiplie le numérateur et le dénominateur par $a - \sqrt{b}$;
- ii) Si le dénominateur s'écrit de la forme $a - \sqrt{b}$,
on multiplie le numérateur et le dénominateur par $a + \sqrt{b}$,

pour tous réels $a \geq 0$, $b \geq 0$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \quad ; \quad (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$$

Exemple 1 $B = \frac{3}{2+\sqrt{3}} = \frac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{6-3\sqrt{3}}{4-3} = 6 - 3\sqrt{3}$

Exemple 2 $C = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})} = \frac{5\sqrt{5.6}+5\sqrt{5^2}}{6-5} = 5\sqrt{30}$

On appelle la quantité conjuguée de $a + \sqrt{b}$, la quantité $a - \sqrt{b}$ et réciproquement

EXERCICE

1°/ Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

2°/ Calculer la somme $S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

III°/ Comparaison des réels

Activité 1

Compléter le vide pour rappeler les règles de comparaison

1°/ Règles sur les comparaisons.

- Soient a et b deux nombres réels quelconques : $a \leq b$ équivaut à ≤ 0
- Soient a, b et c trois nombres réels : Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $\leq c$
- Soient a, b, c et d quatre nombres réels :
 - * Si $a \leq b$, alors ; $a + c \leq b + \dots$
 - * Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq \dots$
- Soient a, b et c trois réels : Si $a \leq b$ et si $\begin{cases} c > 0 & \text{alors} \dots \leq \dots \\ c < 0 & \text{alors} \dots \geq \dots \end{cases}$
- Soient a, b, c et d quatre nombres réels strictement **positifs**
Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a \cdot c \leq \dots$

2°/ Comparer les carrés, racines carrées et inverses de nombres.

- Si a et b deux réels **positifs** et $a \leq b$, alors ; $a^2 \dots b^2$
- Si a et b deux réels **negatifs** et $a \leq b$, alors ; $a^2 \dots b^2$
- Si a et b deux réels **positifs** et $a \leq b$, alors ; $\sqrt{a} \dots \sqrt{b}$
- Si a et b non nuls de même signe et $a \leq b$, alors ; $\frac{1}{a} \dots \frac{1}{b}$

Activité 2 comparaison de $\sqrt{a}$, a et a^2

soit a réel positif :

- 1) Montrer que si $(a \geq 1)$ alors $(\sqrt{a} \leq a \leq a^2)$
- 2° Montrer que si $(0 \leq a \leq 1)$ alors $(a^2 \leq a \leq \sqrt{a})$

Retenons

soit a réel positif a on a :

- si $(a \geq 1)$ alors $(\sqrt{a} \leq a \leq a^2)$
- si $(0 \leq a \leq 1)$ alors $(a^2 \leq a \leq \sqrt{a})$

EXERCICE 1

Soit a un réel positif

- 1°/ a) Vérifier que pour tout $a \geq 0$ $\sqrt{a^2 + 1} - a = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1} + a}$
- b) En déduire que pour tout $a \geq 0$; $0 < \sqrt{a^2 + 1} - a \leq 1$

2°/ a) Comparer pour tout $a \geq 0$

i) $\sqrt{a^2 + 1} - a$ et $(\sqrt{a^2 + 1} - a)^2$

ii) $\sqrt{a^2 + 1} - a$ et $\sqrt{\sqrt{a^2 + 1} - a}$

iii) $\sqrt{a^2 + 1} - a$ et $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1} - a}$

b) Ranger alors dans l'ordre croissant :

$\sqrt{a^2 + 1} - a$; $(\sqrt{a^2 + 1} - a)^2$; $\sqrt{\sqrt{a^2 + 1} - a}$; $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1} - a}$ et 1

2°/ Ranger dans l'ordre croissant :

$\sqrt{a^2 + 1} + a$; $(\sqrt{a^2 + 1} + a)^2$; $\sqrt{\sqrt{a^2 + 1} + a}$ et $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1} + a}$

EXERCICE 2

Soient a , b et c des réels positifs tels que $a > b$

a) Comparer $\sqrt{a - b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

b) Comparer les nombres $\sqrt{a + c} - \sqrt{a}$ et $\sqrt{b + c} - \sqrt{b}$

c) Retrouver la résultat trouvée en 1°/ a)

IV°/ Équation carrée

Définition

On appelle **équation carrée**, une équation de la forme $x^2 = a$, où a est un nombre quelconque.

Activité

soit a est un nombre quelconque.

si $a < 0$, **alors** l'équation : $x^2 = a$

si $a = 0$, **alors** l'équation : $x^2 = a$

si $a > 0$, **alors** l'équation $x^2 = a$

Retenons

- **si** $a < 0$, **alors** l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution : $S = \emptyset$
- **si** $a = 0$, **alors** l'équation $x^2 = a$ a une solution unique $x = 0$: $S = \{0\}$
- **si** $a > 0$, **alors** l'équation $x^2 = a$ a deux solutions $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$: $S = \{-\sqrt{a} ; \sqrt{a}\}$

EXERCICE Dans chacun de cas suivants

Développer X^2 , puis en déduire une valeur plus simple de X

a) $X = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ b) $X = \sqrt{12 + 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 - 3\sqrt{7}}$

V/ Les Intervalles

1°/ Intervalles bornés et non bornés.

Définition : a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

L'ensemble des nombres réels x vérifiant la double inégalité $a \leq x \leq b$ est appelé **intervalle fermé** de $\mathbb{R}$. On le note $[a; b]$ ou $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x \leq b\}$.

Les nombres a et b sont les **bornes** de l'intervalle $[a; b]$.

$b - a$ est l'**amplitude** de l'intervalle $[a; b]$.

APPLICATION

1°/ Dans chacun des cas, dire à quel intervalle appartient le réel x :

a) $I = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } -2 \leq x \leq 5\}$; b) $J = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } -2 \leq -2x + 5 \leq 5\}$

2°/ Sachant que $3 - 2x \in [2, 12]$, déterminer un encadrement de x .

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Intervalles bornés	Intervalle	Ensemble des réels x tels que...	Représentation sur la droite graduée
Fermé	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
Semi-ouvert (à droite)	$[a, b[$	$a \leq x < b$	
Semi-ouvert (à gauche)	$]a, b]$	$a < x \leq b$	
Ouvert	$]a, b[$	$a < x < b$	

Intervalles non bornés	Intervalle	Ensemble des réels x tels que...	Représentation sur la droite graduée
Fermé	$[a; +\infty[$	$x \geq a$	
Ouvert	$]a; +\infty[$	$x > a$	
Fermé	$]-\infty; a]$	$x \leq a$	
Ouvert	$]-\infty; a[$	$x < a$	

Applications:

1) Dans chacun des cas, dire à quel intervalle appartient le réel x , puis le dessiner :

a) $-3 < x \leq 2$ b) $1,5 \leq x \leq 4$ c) $x > 3$

2) Traduire par des inégalités l'appartenance du réel x à chacun des intervalles suivants :

a) $x \in]-2; 7]$ b) $x \in [2; +\infty[$

3) Sachant que $5 - 3x \in [-1; 17]$, déterminer un encadrement de x .

2°/ Intersection et réunion de deux intervalles.

Définitions

L'**intersection** de deux intervalles I et J est l'ensemble des réels appartenant à I **et** à J . On le note $I \cap J$. ($\cap$ se lit inter)

$$x \in I \cap J \text{ équivaut à } x \in I \text{ et } x \in J,$$

La **réunion** de deux intervalles I et J est l'ensemble des réels appartenant à I **ou** à J (ou aux deux à la fois). On le note $I \cup J$. ($\cup$ se lit union)

$$x \in I \text{ ou } x \in J, \text{ équivaut à } x \in I \cup J.$$

Exemples :

1) Pour $I = [-3; 5]$ et $J =]2; 7[$,

Représenter I et J sur un droite graduée puis Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

Élément de Correction $[-3; 5] \cap]2; 7[=]2; 5]$ et $[-3; 5] \cup]2; 7[= [-3; 7]$

2) Pour $I = [-3; 5]$ et $K = [6; +\infty[$,

Représenter I et K sur un droite graduée puis Déterminer $I \cap K$ et $I \cup K$.

Élément de Correction $[-3; 5] \cap [6; +\infty[= \emptyset$ et $I \cup K = [-3; 5] \cup [6; +\infty[$

VI/ Valeur absolue et distance.

1°/ Valeur absolue d'un nombre réel.

Définition

: Soit M le point d'abscisse x sur une droite graduée d'origine O .

On appelle **valeur absolue de x** la distance OM , elle se note $|x|$.

On écrit $|x| = OM$.

Conséquence : D'après la définition, on a immédiatement que :

$$\text{pour tout réel } x, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{pour tous réels } a \text{ et } b, \quad |a - b| = \begin{cases} a - b & \text{si } a \geq b \\ b - a & \text{si } a < b \end{cases}$$

Exemple : $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$; $|\sqrt{2} - 5| = 5 - \sqrt{2}$

EXERCICE

1°/ Calculer $A = |\sqrt{5} - 2| - |(2 + \sqrt{5})(4 - \pi)| - |\sqrt{2} - \pi|$

2°/ On donne

$$I = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } -3 \leq x - 3 \leq 1 \};$$

$$J = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } -2 \leq -2y + 5 \leq 5 \}$$

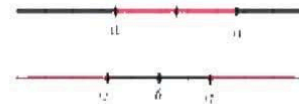
a) Ecrire I et J sous forme des intervalles.

b) On donne $B = |-x + 1| - |y - 4| - |\sqrt{(x - \pi)^2} - \pi|$

Ecrire B sans symbole de la valeur absolue

2/ Propriétés :

- Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :
 - $|x| \geq 0$
 - $|x| \geq x$
 - $|x| \geq -x$
 - $|x| = |-x|$
 - $|x^2| = |x|^2$
- Pour tout x, y dans $\mathbb{R}$ et a dans $\mathbb{R}_+$ on a :
 - $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$
 - $|x| = a$ si et seulement si $x = a$ ou $x = -a$
 - $|x| = |y|$ si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$
 - $|xy| = |x||y|$
 - $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ (avec $y \neq 0$)
 - $|x| \leq a$ si et seulement si $-a \leq x \leq a$
 - $|x| \geq a$ si et seulement si $x \geq a$ ou $x \leq -a$
 - $|x + y| \leq |x| + |y|$



EXERCICE (proposé par Mr Mahmoud Ben Mbarek)

Soient a et b deux réels

1°/ On suppose que $|a + b| = |a| + |b|$ (*)

a) que $|a||b| = a.b$ (*)

b) Que peut-on dire des signes de a et de b

2°/ On suppose que a et b de même signe $|a + b| = |a| + |b|$ est vérifié

3°/ Résoudre $|x^2 - 3x + 1| = |x^2| + |-3x + 1|$

VII/Estimation d'une expression numérique

Activité résolu

- a) Parmi les nombres 1 000 ; 9 000 et 10 000 quel est le nombre le plus proche à
 $P = 11 \times 99$
- b) Parmi les nombres 500 , 489 et 100 quel est le nombre le plus proche à
 $P' = 48,5 \times 1,9$

Correction

- a) 11 est proche de 10 et 99 est proche de 100.
 11×99 est proche de $10 \times 100 = 1\,000$.
- b) 48,5 est proche de 50 et 1,9 est proche de 2.
 $48,5 \times 1,9$ est proche de $50 \times 2 = 100$.

Définition de l'ordre de grandeur.

L'ordre de grandeur d'un nombre est la puissance de 10 la plus proche de ce nombre.

- $2,543 \times 10^3$ a pour ordre de grandeur 10^3 , car 2,543 est inférieur à 5.
- $6,7 \times 10^3$ a pour ordre de grandeur 10^4 , car 6,7 est supérieur à 5.

Méthode de détermination d'un ordre de grandeur

Commencer par écrire la valeur en **notation scientifique**,
c'est à dire sous la forme $a \times 10^b$

- Si a est strictement inférieur à 5 alors l'ordre de grandeur de $a \times 10^b$ est 10^b
- Si a est supérieur ou égal à 5 alors l'ordre de grandeur de $a \times 10^b$ est de 10^{b+1}

EXERCICE Remplir le tableau suivant :

$1\text{ nm} = 10^{-9}\text{ m}$

	distance	distance en mètre (notation scientifique)	ordre de grandeur
Terre-Lune	380 000 km	$3,8 \cdot 10^8\text{ m}$	
Rayon atome d'hydrogène	0,105 nm		
Dimension d'une molécule	2 nm		10^{-9} m
Rayon de la Terre	6400 km		
Taille d'un homme	170 cm		$10^0 = 1\text{ m}$
Distance Terre-Soleil	150 millions km	$1,5 \cdot 10^{11}\text{ m}$	
Dimension d'une cellule humaine	0,016 mm		
Taille estimée de l'Univers	$12 \cdot 10^{22}\text{ km}$		