

LES EXERCICES

Exercice 1 : L'une des réponses est correcte la quelle : 1) $\cos \frac{13\pi}{3} =$ a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\sin \frac{26\pi}{5} =$ a) $\sin \frac{\pi}{5}$ b) $-\sin \frac{\pi}{5}$ c) $\cos \frac{\pi}{5}$

3) Soit ABC un triangle non rectangle .

a) $\tan(\hat{A} + \hat{B}) = -\tan \hat{C}$ b) $\tan(\hat{A} + \hat{B}) = \tan \hat{C}$ c) $\tan(\hat{A} + \hat{B}) = \pi - \tan \hat{C}$.

6) $\cos \frac{15\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} =$ a) 1 b) $2\cos \frac{\pi}{8}$ c) 0

7) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x =$ a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

8) Pour tout réel x; $\cos(2x) =$ a) $2\cos x$; b) $2\cos^2 x - 1$; c) $1 - 2\cos^2 x$

Exercice 2: 1°/ Vérifier que pour tout réel x on a

a) $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$. b) $\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin x \cos x = 1$

2°/ Montrer que pour tout réel x on a : $\cos^2 x - \cos x - 6 < 0$

Exercice 3 : Soit x et y deux réels

1°/ Montrer que $(\sin x - \sin y)(\sin x + \sin y) = \sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 x$.

2°/ Montrer que : $(\cos x - \cos y)^2 = (1 - \cos x \cos y)^2 - \sin^2 x \cdot \sin^2 y$.

3°/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{K\pi\}$ on a : $\cotg^2 x - \cos^2 x = \cotg^2 x \times \cos^2 x$

58 Chapitre 1 : Fonctions trigonométriques - 2ème année de l'enseignement secondaire

Exercice 4 : 1°/ Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer les égalités suivantes :

$$* \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \quad * \sqrt{3} \cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$* -2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin x + 1 = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$2) \text{ a) Montrer que } \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \text{ b) Montrer que : } 1 - \cos x - \sin x = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$3^\circ / \text{Montrer que : } 2 + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 4 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice 5 : 1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos 2x - \sin 2x + 1 = 2 \cos x (\cos x - \sin x)$

$$\text{b) Montrer que pour tout } x \in \mathbb{R} : \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$2) \text{ a) Montrer que pour tout } x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[: \frac{2 \cos 2x}{\cos 2x - \sin 2x + 1} = 1 + \tan x. \text{ b) En déduire que } \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$$

Exercice N° 6 : Pour tout réel x ; on pose $U(x) = \sin(\pi x) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

$$1) \text{ a) Calculer } U(1), U\left(-\frac{1}{3}\right); U\left(\frac{3}{2}\right) \text{ et } U\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\text{b) Montrer que pour tout réel } x \text{ et pour tout entier relatif } k, \text{ on a : } U(x + 4k) = U(x)$$

$$2) \text{ a) Montrer que pour tout réel } x, U(x) = -4 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

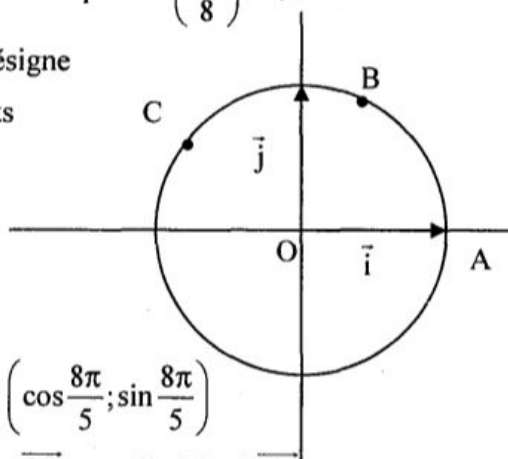
$$\text{b) Calculer alors les valeurs exactes de } \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \text{ et } \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right). \text{ c) En déduire que } \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} + 1$$

Exercice 7 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on désignepar ζ le cercle trigonométrique de centre O et par A ; B et C les points

$$\text{de } \zeta \text{ tels que } \overrightarrow{OA} = \vec{j}; \quad (\vec{i}; \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi \text{ et } (\vec{i}; \overrightarrow{OC}) = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi.$$

1) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A ; B et C .

2) Construire dans la figure ci-contre les points



$$D \text{ et } E \text{ de coordonnées cartésiennes respectives } \left(\cos \frac{6\pi}{5}; \sin \frac{6\pi}{5}\right) \text{ et } \left(\cos \frac{8\pi}{5}; \sin \frac{8\pi}{5}\right)$$

$$3) \text{ a) Montrer que } (\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{BO}) = (\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{OE}) + 2k\pi. \text{ b) En déduire que } \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{OB}$$

$$\text{c) Montrer alors que } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{OA}$$

$$5) \text{ a) Montrer que } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$$

$$\text{b) Déduire que } 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0 \text{ et } \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5} = 0$$

Exercice 8 : 1°/ Démontrer les égalités suivantes :

$$a) \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} ; \quad b) \tan 2x - \tan x = \frac{\tan x}{\cos 2x} ; \quad c) \frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^4 x} = \frac{\tan^2 2x}{2 + \tan^2 2x}$$

2°/ a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

b) En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{11\pi}{21} + \cos \frac{17\pi}{21}$

c) Montrer que : $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

Exercice 9 : 1°/ Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer les égalités suivantes :

$$* \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) ; * \sqrt{3} \cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$* -2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin x + 1 = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

2°/ a) Montrer que $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) Montrer que : $1 - \cos x - \sin x = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

3°/ Montrer que : $2 + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 4 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 10 : 1) Montrer que $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

2) a/ Montrer que pour tout réel x on a : $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{5}{8}$

b/ Calculer la somme suivante :

$$A = \cos^6 x + \cos^6\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^6\left(x + \frac{2\pi}{6}\right) + \cos^6\left(x + \frac{3\pi}{6}\right) + \cos^6\left(x + \frac{4\pi}{6}\right) + \cos^6\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$$

Exercice 11 : Pour tout x , on pose $f(x) = \cos 2x - 3 \cos x + 2$

1) a) Vérifier que pour tout réel x , on a : $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$

b) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$

c) Montrer alors que $f\left(\frac{11\pi}{12}\right) + f\left(\frac{7\pi}{12}\right) - f\left(\frac{5\pi}{12}\right) - f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3\sqrt{6}$

2) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1$

Exercice 12 : Sur le parchemin ci-dessous ne figurent qu'un carré, 3 segments et 3 indications de longueur : $PD=2$, $PA=4$, $PB=6$. Déterminer l'angle (DPA) , de sommet P .

