



LES EXERCICES

Exercice 1 : Résoudre dans $[0, 2\pi[$ les équations suivantes : a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos x = \frac{1}{2}$; c) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$;

d) $\sin 2x + \sin x \cos x = 0$; e) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2 : 1°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $]-\pi, \pi]$ a) $\cos 2x + \cos x = 1$; b) $\sin|x| = \frac{1}{2}$;

c) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; d) $\cos^2 x = \sin^2 x$; e) $\cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x = 1$; f) $\tan x + \tan 3x = 0$

$g(x) = \tan(2x) \cot\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ a) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; b) $\sin^2 x - 3 \sin x - 4 = 0$;

c) $(\sqrt{2} + 1)\sin^2 x + (\sqrt{2} - 1)\cos^2 x + \sin 2x = \sqrt{2}$; d) $(\cos x - \sin x)^2 = \frac{1}{2}$; e) $\tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0$

Exercice 4 : Résoudre dans $[0, 2\pi[$ a) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\cos x \geq \frac{1}{2}$, c) $\sqrt{1 - \cos x} > \sin x$

d) $\sqrt{2} \sin x + 1 < 0$, e) $2 \sin 2x - \sqrt{3} \leq 0$

Exercice 5 : Résoudre dans $[0, \pi]$ a) $4 \sin^2 x - 1 \leq 0$, b) $\cos 2x + \sin 2x - 1 \geq 0$; c) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} < 0$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, \pi]$ a) $4 \cos^2 x - 2(\sqrt{2} - 1)\cos x - \sqrt{2} > 0$

; b) $\sqrt{3} \tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 < 0$; c) $\frac{\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x}{2 \sin x - 1} \geq 0$; d) $\frac{1 - \sin 2x}{\sin 2x} \geq 1$

Exercice 7 :

A/ Soit la fonction $f(x) = 3 \cos x + 16 \cos^5 x - 16 \cos^3 x$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = \cos x (1 + 2 \cos 4x)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$; $f(x) = 0$. 3) Etudier le signe de $f(x)$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

B/ Soit la fonction $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{\sin x - \sin 3x + \sin 5x}{f(x)}$

1) Déterminer le domaine de définition D_g de g . 2) Montrer que $g(x) = \tan x$.

3) Montrer que $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$. 4) Résoudre l'inéquation $g(x) < 2 - \sqrt{3}$

Exercice N°8 :

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = 1 - \cos 2x + \sin 2x$ et $g(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{2} \cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

1) a) Calculer $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = 2\sqrt{2} \sin x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$

2) a) Déterminer l'ensemble de définition de g . ; b) Simplifier $g(x)$

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et (ξ) est le cercle trigonométrique de centre O .

a) Représenter l'ensemble des points M de (ξ) tel que $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = x + 2k\pi$ et $g(x) \leq 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R} : g(x) \leq 0$

Exercice 9 : Soit la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$. 1) a/ Déterminer D_f . b/ Comparer $f(x)$ et $f(x + \pi)$.

2) Montrer que pour tout $x \in D_f : f(x) = \frac{(\sin x - \cos x)(4 + 2 \sin 2x)}{\sin^2 2x}$

3) a/ Résoudre dans $[0, \pi] : \sin x - \cos x = 0$. b/ Donner le signe de $f(x)$ sur $D_f \cap [0, \pi]$

4) Soit $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Déterminer $D_g \cap [0, \pi]$

Exercice 10: 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi]$ l'équation $\cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x = 2 \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

2) Soit la fonction $f(x) = \frac{\cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x - 2 \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)}{1 - 2 \sin^2 x}$. a/ Déterminer D_f

b/ Montrer que pour tout $x \in D_f : f(x) = -4 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. c/ Calculer $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et en déduire $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$

d/ Résoudre l'équation $(\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x \leq 2$

Exercice 11: Pour tout x , on pose $f(x) = \cos 2x - 3 \cos x + 2$

1) a) Vérifier que pour tout réel x , on a : $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$

b) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$

c) Montrer alors que $f\left(\frac{11\pi}{12}\right) + f\left(\frac{7\pi}{12}\right) - f\left(\frac{5\pi}{12}\right) - f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3\sqrt{6}$

2) a) Vérifier que pour tout réel x on a $f(x) = 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1$

b) Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'inéquation $f(x) > 0$

3) On pose $g(x) = \frac{\tan 2x}{\sqrt{f(x)}}$; résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$; l'inéquation $g(x) \leq 0$

Exercice N°12 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a) $\cos(2x) = 0$; b) $2 \sin(2x) + \sqrt{3} = 0$.

2) En déduire les solutions, dans $[0; \pi]$, de l'équation $\sin(4x) + \sqrt{3} \cos(2x) = 0$

Exercice N°13 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto 1 - \sin 2x + \cos 2x$

1) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = 2\sqrt{2} \cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x) = 0$

2) Soit $g : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{f(x)}$ a) Déterminer le domaine de définition D de g

b) Montrer que $\forall x \in D ; g(x) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$

c) Calculer $g\left(\frac{\pi}{12}\right)$ En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$; d) Résoudre dans D l'équation $g(x) = 1$

Exercice N°14 : Soit $A(x) = \cos 2x + \sin 2x ; x \in [0; 2\pi[$

1) Calculer $A(0)$ et $A\left(\frac{\pi}{8}\right)$; 2) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $A(x) = 0$

3) a) Montrer que $A(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$; b) En déduire que $A(x) = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

4) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation : $A(x) \geq 1$

Exercice N°15 :

Soit $f(x) = (\sqrt{3} - 1) \cdot \sin 2x + (\cos x + \sin x)^2$.

1. Montrer que $f(x) = 1 + \sqrt{3} \cdot \sin 2x$ et calculer $f\left(\frac{49\pi}{12}\right)$.

2. Soit $g(x) = 1 + \sqrt{3} \cdot \sin 2x + 2 \cdot \cos^2 x$.

a. Montrer que $g(x) = 2 + 2 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, \pi]$ l'équation $g(x) = 1$.

3. Résoudre dans $[0, \pi]$ l'inéquation $f(x) > \frac{\sqrt{3} + 2}{2}$.

Exercice N°16 : n étant un entier naturel non nul résoudre l'équation $\cos^n x - \sin^n x = 1$