

LES EXERCICES

Exercice 1 : L'une des réponses proposées est correcte laquelle ?

1) ABC un triangle tel que $AB = 2$ et $AC = \frac{1}{2}$; $\hat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égale à :

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}$.

2) Si ABCD un carré de côté 1. Alors le produit scalaire $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} =$ a) $\sqrt{2}$ b) 1 c) $-\sqrt{2}$

3) ABC étant un triangle tel que: $AB = 2$, $AC = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -5$. a) $\hat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ b) $\hat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ c) $\hat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.

4) A et B étant deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que : $|\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}| = MA \times MB$ est

- a) un cercle b) une droite c) un segment.

5) A, B, C et D quatre points deux à deux distincts tels que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ alors nécessairement on a :

- a/ C et D sont confondus b/ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ c/ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

6) ABC est un triangle, l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est :

64

□ Mathématiques □ 3^{ème} sciences techniques □

- a) La perpendiculaire à (AC) en C.
c) La perpendiculaire à (AB) en A.

b) La perpendiculaire à (AB) et passant par C.

7) Soit ABC un triangle tels que : $AB = AC = 2$ et $BC = 3$. Alors a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1$.

8) Soient A et B deux points distincts. L'ensemble des points M tels que : $MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA}$ est :

- a) Le cercle de centre A et de rayon BA. b) La droite (AB) c) Le cercle de diamètre [AB].

Exercice 2 : Répondre par vrai ou Faux et Justifier la réponse

1°) A, B et C sont trois points distincts si : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$ alors $(AB) \perp (AC)$.

2°) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$

3°) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

4°) A, B et C trois points distincts : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

Exercice 3 : Soit D une droite muni du repère $(O, \vec{i})$

1°/ Placer les points A, B et C s'abscisses respectifs 5, -3 et 2.

2°/ Soit D' la perpendiculaire à D en O et E un point de D' distinct de O.

Calculer : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE}$

Exercice 4 : Dans la figure ci-contre : ABCD est un rectangle tel que $AB = 2AD = 2a$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$)

EFC et EGD sont deux triangles équilatéraux isométriques. Calculer :

- 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GF}$; 3) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DE}$; 4) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BF}$

Exercices 5 : ABC un triangle équilatéral tel que $AB=3$, I le milieu de [AB] et

D le symétrique de B par rapport à C.

1) a- Utiliser le théorème d'ELKHASHI pour calculer AD

b) vérifier que ABD est un triangle rectangle en A

2) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$

3) a) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

b) En déduire l'ensemble $\Delta = \{M \in P; MA^2 - MB^2 = -9\}$

4) Soit G le barycentre des points pondérés (A,3) et (B,-2)

a) Montrer que pour tout point M du plan : $3MA^2 - 2MB^2 = MG^2 - 54$

b) En déduire l'ensemble $E = \{M \in P; 3MA^2 - 2MB^2 = -38\}$

Exercice 6 : Dans le plan P, on considère un rectangle ABCD de centre O et tel que : $AB = 6$ et $AD = 3$.

Soit I le point tel que : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BD}$; b) En déduire que les droites (CI) et (BD) sont perpendiculaires

2) Déterminer et construire les ensembles suivants :

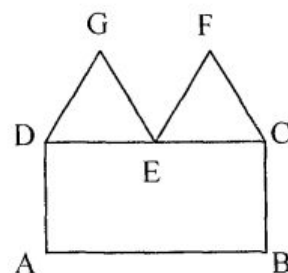
$$E = \{M \in P; MB^2 + MD^2 = 45\} \text{ et } F = \{M \in P; (\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MI} = MB^2 \cdot \overrightarrow{MI}\}$$

EXERCICE 7 : Le plan P est orienté dans le sens direct. Soit ABCD un rectangle de centre I tel que $AB = 4$ et $BC = 3$.

1) a) Faites un schéma.

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

c) Montrer alors, que : $\cos(\widehat{CID}) = \frac{-7}{25}$.



2) a) Vérifier que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$.

b) Dédire que l'ensemble $\Delta = \{M \in P, \text{ tels que } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 8\}$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

3) Soit $\Gamma = \{M \in P, \text{ tels que } 2MA^2 + MD^2 = 18\}$ et G le barycentre des points pondérés (A,2) et (D,1).

a) Vérifier que $D \in \Gamma$.

b) Montrer que pour tout $M \in P$ on a : $2MA^2 + MD^2 = 3MG^2 + 6$. Déterminer et tracer alors Γ .

4) On désigne par A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la droite (BD).

a) Montrer que : $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD} = -5A'C'$. b) En déduire la valeur de la distance A'C'.

Exercice 8 : Dans le plan P on considère un triangle ABC rectangle en A de centre de gravité G ; tel que $AC=2$ et $BC=3$. Soit $I=B \cdot C$; $J=A \cdot C$

1/ Calculer $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$. 2/ Déterminer l'ensemble $E = \left\{ M \in P; MB^2 + MC^2 = \frac{25}{2} \right\}$.

3/ Soit l'ensemble $F = \{M \in P; \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{MG} = -1\}$. a- Vérifier que $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = -2$

b- Montrer que pour tout M du plan on a $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{MG} = MG^2 - 2$. c- Dédire l'ensemble F.

Exercice 9 : Soit ABCD un rectangle du plan tels que : $AB = 8$ et $BC = 4$. on note E le point de $[CD]$ tel que : $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{CD}$, $\{I\} = (AC) \cap (BE)$ et $\{F\} = (AD) \cap (BE)$.

1) a- Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE}$. b. En déduire que : $(CE) \perp (AC)$.

2) Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF}$.

3) On note ζ l'ensemble des points M du plan tel que : $MB^2 + 4ME^2 = 272$.

a- Montrer que $A \in \zeta$.

b- Montrer que : $\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IE} = \vec{0}$. Calculer alors IB et IE.

c- Montrer que pour tout M du plan : $MB^2 + 4ME^2 = 5MI^2 + 16$.

d- En déduire ζ et le construire.

Exercice 10 : Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On donne les points $A(1;0)$; $B(-3;8)$ et $C(3-\sqrt{3}; 1+2\sqrt{3})$.

1) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; b) En déduire la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$

2) Soient les points $I(0;2)$ et $J(3;-4)$

a) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (ζ) des points M de P qui vérifient $MJ = 2MI$

b) En déduire que (ζ) est le cercle de diamètre $[AB]$

3) a) Donner une équation de la tangente (T) à (ζ) en A. b) Prouver que $(T) = \{M \in P \setminus MJ^2 - MI^2 = 15\}$

Exercice 11 : On considère, dans un plan P, un triangle ABC ; on désigne par I le milieu du segment $[BC]$ et par K le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) . On donne $BC = 2$; $CK = 6$; $AC = 10$ et $C \in [BK]$.

1) a) Faire une figure ; b) Prouver que le triangle ABK est isocèle

2) Calculer chacun des produits scalaires suivants : $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}^2$

3) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et soit l'application :

$f : P \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $M \mapsto f(M) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{MG}$. a) Calculer $f(A)$ et $f(G)$

b) Montrer que pour tout point M de P, on a $f(M) = MG^2 + f(G)$

c) Déterminer l'ensemble (ζ) des points de P qui vérifient $f(M) = \frac{556}{9}$

b) En déduire l'ensemble D des points I lorsque M varie sur Δ .

Exercice 12 : Soit ABCD un carré de centre O. M est un point variable de la diagonale [AC] distinct de A et C. M se projette en P et Q sur les côtés [AB] et [AC] du carré.

1) Montrer que (DM) est perpendiculaire à (PQ).

2) On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].

a) Calculer $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$; b) Montrer que OPQ est un triangle rectangle isocèle.

Exercice 13 : On considère un rectangle ABCD tel que $AB = 4$ et $BC = 2$. On pose I le milieu de [CD] et G le barycentre des points pondérés (C;3) et (D;1). Les droites (AC) et (BG) se coupent en K.

1) a) Montrer que $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CA} \cdot \overline{CG} = 4$. b) En déduire que les droites (AC) et (BG) sont perpendiculaires.

2) a) Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$; $\overline{AB} \cdot \overline{DG}$; $\overline{BC} \cdot \overline{AD}$ et $\overline{BC} \cdot \overline{DG}$; b) En déduire que $\overline{AC} \cdot \overline{AG} = 16$

c) Calculer alors la distance AK.

3) a) Montrer que pour tout point M du plan ; On a $3MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + 12$

b) Déterminer et construire l'ensemble $\xi = \{M \in P \text{ tel que } 3MC^2 + MD^2 = 16\}$

4) Soit $\Delta = \{M \in P \text{ tel que } MD^2 - MC^2 = 16\}$. a) Vérifier que $C \in \Delta$; b) Montrer que Δ est la droite (BC).

Exercice 14 : I) Soit A, B et C trois points alignés du plan P tels que $\overline{AC} = 3\overline{AB}$. On note $I = B * C$

1) a) Montrer que $B = A * I$

b) Montrer que pour tout point M du plan on a : $\overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MA} \cdot \overline{MC} = 2(MB^2 - AB^2)$

2) Déterminer alors l'ensemble $\zeta = \{M \in P ; \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{AM} \cdot \overline{AC}\}$

II) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ On donne $A(-2, 1)$ et $B(-1, 2)$

1) Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 6$

2) Montrer que ζ et Δ sont tangente au point I

Exercice 15 : Soit un triangle ABC tel que $AB = 4$; $AC = 6$ et $BC = 8$

On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC]

1) a) Montrer que pour tout M du plan P on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 8$

b) Montrer que $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = MJ^2 - 9$

c) Déterminer l'ensemble ζ des points M de P tel que $MA^2 + MB^2 - \overline{MA} \cdot \overline{MC} = 1$

2) Soit $O = I * J$ et $(O, \vec{u})$ un repère de la droite (IJ) tel que $\vec{u} = \frac{1}{4} \overline{IJ}$

a) Montrer que pour tout $M \in P$ on a : $MI^2 - MJ^2 = 2\overline{IJ} \cdot \overline{OK}$ avec k est le projeté orthogonal de M sur la droite (IJ)

b) Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 - 2\overline{MA} \cdot \overline{MC} = -6$

Exercice 16 :

a, a', b, b' étant 4 réels quelconques montrer que $(ab + a'b')^2 \leq (a^2 + a'^2) \times (b^2 + b'^2)$.