



LES EXERCICES

Exercice n°1 : I) La forme algébrique du nombre complexe

$$z = \frac{(2-i)(1+3i)}{-2+3i} \quad \text{a) } \frac{5}{13} - i\frac{25}{13} \quad \text{b) } \frac{5}{13} + i\frac{25}{13} \quad \text{c) } -\frac{5}{13} + i\frac{25}{13}$$

II) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On donne les points

$A(i)$; $B(-4-i)$ et $C(-2+5i)$

1) Le triangle ABC est a) équilatéral b) isocèle en B c) rectangle et isocèle en A

2) L'ensemble $\Delta = \{M(z); |z-1| = |z+4+i|\}$ est :

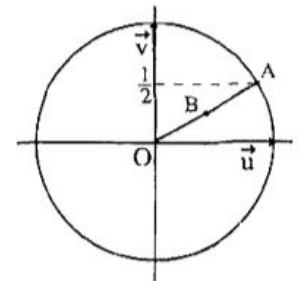
a) Le cercle de diamètre [AB] b) la droite (AB) c) la médiatrice du segment [AB]

III) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z^2-4)(z^2+9)=0$

a) $\{2, -2, 3, -3\}$ b) $\{2, -2, 3i, -3i\}$ c) $\{2i, -2i, 3, -3\}$

Exercice N°2 : 1) Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

- 1) i^{1010} est égal à 1
- 2) Pour tous nombres complexes z et z' ; $(z^2 + z'^2 = 0)$ si et seulement si $(z = z' = 0)$
- 3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit ξ le cercle de centre O et de rayon 1. On désigne par M et M' les points d'affixes respectives z et $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$; si $M \in \xi$ alors $M' \in \xi$
- 4) a) $\left| \frac{222 + 222i}{222 - 222i} \right| = 1$
- 5) Si $z = 2\left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}\right)$ alors $\arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
- 6) Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1^2 + z_2^2 = 0$ alors $z_1 = z_2 = 0$
- 7) La forme trigonométrique du nombre complexe $1 + i \tan \frac{3\pi}{5}$ est $\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{5}} \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)$.
- 8) Pour tout nombre complexe non nul z et pour tout réel θ , si $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ alors $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\theta}{2} + 2k\pi$.
- 9) Pour tout nombre complexe non nul Z , le nombre complexe $\frac{1}{Z} - \frac{1}{\bar{Z}}$ est imaginaire.
- 10) Dans la figure ci-contre, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et A est un point du cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{1}{2}$



Si B est le milieu du segment $[OA]$ alors l'affixe du point B est $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4}i$

Exercice N°3 : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on

considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i$; $z_B = -1 + 2i$ et $z_C = -i$.

- 1) Placer les points A , B et C .
- 2) Calculer AB , AC et BC . En déduire la nature du triangle ABC .
- 3) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
- 4) On pose $E = \{M(z) \in P; |z + i| = 2\}$ et $F = \{M(z) \in P; |2iz + 2i + 4| = 2|z + i|\}$.
 - a) Déterminer l'ensemble E .
 - b) Montrer que F est la médiatrice de $[BC]$.
- 5) Soit l'application $f : P \setminus \{A\} \rightarrow P$ qui pour tout point $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \frac{z + 1 - 2i}{z - 1 - i}$; $z \neq 1 + i$.
 - a) Montrer que $f(C) = A$;
 - b) Montrer que $(z' - 1)(z - 1 - i) = 2 - i$
 - c) En déduire que si $M \in \zeta_{(A;1)}$ alors M' appartient à un cercle ζ' que l'on précisera.

d) Montrer que si $M \in \text{méd}([AB])$ alors M' appartient à un cercle ζ'' que l'on précisera.

Exercice N°4: Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, M' et M'' d'affixes respectives i ; $i+m$; $i-m$.

a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M'M'']$. b) Montrer que le triangle $OM'M''$ est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de m pour que le triangle $OM'M''$ soit équilatéral.

Exercice N°5: Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes d est un nombre complexe donné de module 2. dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B, M et N

d'affixes respectifs $2i$; $-i$; $-i+d$; $-i-d$. a) Calculer MN et déterminer le milieu de $[MN]$

b) En déduire que lorsque d varie, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.

d) En déduire les valeurs de d pour les quelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.

Exercice N°7: Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

I) Soit le nombre complexe $z_1 = 1 + 2i$.

1) Calculer les nombres complexes suivants : $z_2 = iz_1$ et $z_3 = iz_2$.

2) a) Placer les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1 ; z_2 et z_3 .

b) Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle et rectangle en M_2 .

c) Déterminer le nombre complexe z_4 du point M_4 pour que $M_1M_2M_3M_4$ soit un carré.

II) A tout nombre complexe $z \neq -3$ on associe le nombre complexe z' définie par $z' = \frac{z-2i}{z+3}$.

1) On suppose que $z = z_1$, déterminer l'écriture cartésienne de z'

2) Déterminer l'ensemble suivant $E = \{M(z) \text{ tel que } z' \in \mathbb{R}\}$.

Exercice N°8: Soit dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points A, B, C et D

d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$; $z_B = 4i$; $z_C = \frac{z_B}{z_A}$ et $z_D = z_B \times z_C$ soit $I = O * B$ et $K = O * D$.

1) Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle

2) a) Mettre z_C sous forme algébrique ; b) Montrer que $C = A * O$

c) Soit $E = \{M(z) \in P \text{ tel que } |z-2-2i| = |z|\}$. Déterminer E et montrer que E est parallèle à (AB)

3) a) Déterminer z_D ; b) Montrer que OABD est un trapèze.

4) Soit $F = \{M(z) \in P \text{ tel que } |z-2i| = 2\}$

a) Vérifier que $K \in F$; b) Déterminer F ; c) Vérifier que OABK est un carré

EXERCICE N°10: Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé droit $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A $(1+i)$; B $(3+i)$; C $(2+2i)$ et D $(2i)$.

1) a) Placer les points A ; B ; C et D. b) Montrer que ABCD est un parallélogramme

2) a) On pose $z_E = z_D - z_A$, donner la forme trigonométrique de z_E .

b) On pose $z_F = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$, donner la forme trigonométrique de $\frac{z_E}{z_F}$.

c) En déduire $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$ d) Calculer $\left(\frac{z_E}{z_F}\right)^{12}$

Exercice N°11 : 1) a) Développer $(z + 6i)^2 - 12$; $z \in \mathbb{C}$. b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 12iz - 48 = 0$.

2) Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 + i$. a) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Mettre $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique et trigonométrique. c) Déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercice N° 12: Soit les nombres complexes suivants: $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$; $z_2 = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$ et $z_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

1) Déterminer l'écriture trigonométrique de z_1 ; z_2 et z_3 .

2) En déduire l'écriture trigonométrique du nombre complexe $U = \frac{z_1 \times z_2}{z_3}$.

3) Déterminer l'écriture algébrique de U . 4) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

Exercice n°13: dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 = -4$.

b- Soit Z un nombre complexe. Développer $(Z - 2\sqrt{3})^2$.

c- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^2 - 4\sqrt{3}Z + 16 = 0$.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $Z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ et $Z_B = 2\sqrt{3} + 2i$.

a- Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes Z_A et Z_B .

b- Construire les points A et B. c Donner une mesure de l'angle orienté $(\widehat{OA, OB})$.

d- Montrer que le triangle OAB équilatéral.

3) Déterminer l'affixe du centre de gravité I du triangle OAB.

4) Déterminer l'affixe du point C tel que OABC soit un losange.

5) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes Z tels que $|Z| = |\bar{Z} + 4i|$.

Exercice N°14 : Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les

points A, B et C d'affixe respectives : $a = i$, $b = \cos \theta + i(1 - \sin \theta)$ et $c = -\cos \theta - i(1 + \sin \theta)$. $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

a) Déterminer θ pour que A, B et C soient alignés.

b) Déterminer θ pour que B et C appartiennent à un cercle de centre O. quel est le rayon de ce cercle ?