

**Théorème :** Un triplet de vecteurs de  $\mathbf{W}$  forme une base, si et seulement si, son déterminant relativement à une base quelconque de  $\mathbf{W}$  est différent de 0.



## LES EXERCICES

**Exercice N°1 :** ABCD un tétraèdre ; I, J, K et L sont les points définis par :  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$  ;

$$\overrightarrow{CK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{AL} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

1) Calculer les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$ .

2) Calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{IL}$  et  $\overrightarrow{JK}$  et déterminer le réel  $m$  tel que :  $\overrightarrow{IL} = m\overrightarrow{JK}$

**Exercice N°2 :** ABCDA'B'C'D' un cube. On note I le milieu de  $[A'D']$ , J celui de  $[AD]$ , K celui de  $[B'C']$  et L celui de  $[BC]$ .

1) a) Démontrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.

b) Démontrer que  $\overrightarrow{D'K}$ ,  $\overrightarrow{D'C'}$  et  $\overrightarrow{B'C'}$  sont coplanaires.

c) Comparer  $\overrightarrow{IB'}$  et  $\overrightarrow{D'K}$ .

2) Démontrer que les plans  $(IJB')$  et  $(D'KL)$  sont parallèles.

**Exercice N°3 :** Dans l'espace  $\xi$ , rapporté à un repère

cartésien  $R = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les points :  $A(1; 1; -2)$  ;

$B(0; 2; 1)$  ;  $C(-1; 2; 3)$  et  $D(0; 3; 2)$ .

1) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés. On désigne par P le plan  $(ABC)$ .

2) Montrer que le point D appartient au plan P.

3) Soit  $F(1-m; m; m+1)$ , où  $m$  est un paramètre réel. Déterminer  $m$  pour que la droite  $(AF)$  soit contenue dans le plan P

4) On considère les vecteurs :  $\vec{e}_1 = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ;  $\vec{e}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$  et  $\vec{e}_3 = \vec{i} + 2\vec{j}$ .

a) Montrer que  $R' = (A; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$  est un repère de  $\xi$ .

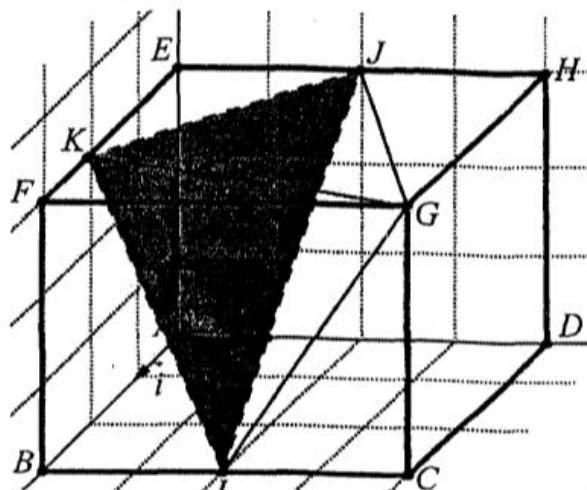
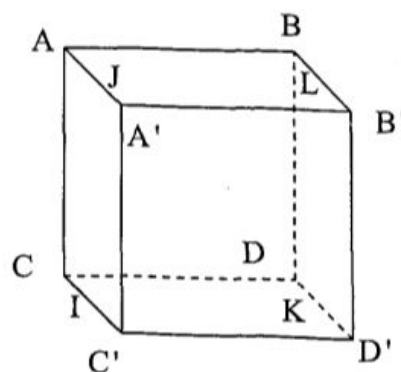
b) Déterminer les coordonnées du point B dans le repère  $R'$ .

**Exercice n°4 :** L'espace est muni d'un repère orthonormé

de sens direct  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère le parallélépipède

ABCDEFGH tel que :  $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ ,  $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$  et  $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$ .

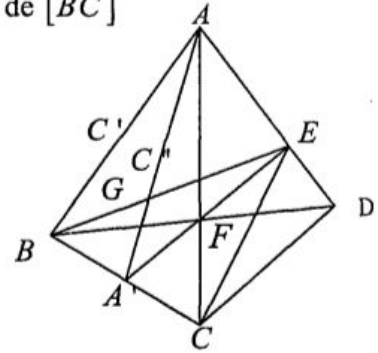
1) Vérifie que :  $\overrightarrow{AG} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ .



2) Soient les points I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [EH]. Soit K le point défini par :  $\overrightarrow{EK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$ . Déterminer les coordonnées de I et J et K

**Exercice 5** : On considère un tétraèdre ABCD et les points : A' le milieu de [BC] et G le centre de gravité du triangle ABC.

- 1) Soit le point E défini par  $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD}$ 
  - a) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{EG}$  et  $\overrightarrow{DA'}$  sont colinéaires.
  - b) Que peut-on en déduire pour les vecteurs  $\overrightarrow{EG}$  ;  $\overrightarrow{DB}$  et  $\overrightarrow{DC}$  ?
- 2) Soit le point F défini par :  $\overrightarrow{GF} = \frac{2}{9} \overrightarrow{AD}$ .



Montrer que les points A' ; F et E sont alignés et que F est le centre de gravité du triangle BCE.

- 3) Soient les points C' et C'' milieux respectifs des segments [AB] et [EB]. Montrer que  $\overrightarrow{C'C''} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$
- 4) Soit le point M défini par  $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB} + \frac{4}{3} \overrightarrow{AD}$ .
  - a) Montrer que  $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CC'} + 4\overrightarrow{CC''}$
  - b) Que peut-on en déduire pour les points C, C', C'' et M ?

**Exercice N°6** : On muni le plan l'espace d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  ; On donne les points A(-1;1;0) ; B(1;-2;1) ; C(0;-1;0) et D(-1;-2;2).

- 1) Placer les points A ; B ; C et D. 2) Soient  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$  et  $\Delta(C; \vec{v})$ . Montrer que (AB) et  $\Delta$  sont parallèles.
- 3) On considère  $\vec{w} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et le plan  $Q(A; \overrightarrow{AB}; \vec{w})$ .
  - a) Montrer que la droite (AB) est incluse dans le plan Q ;
  - b) En déduire la position relative de  $\Delta$  et Q
  - 4) a) Montrer que la droite (CD) est parallèle au plan Q
  - b) Les droites (CD) et  $\Delta$  sont-elles coplanaires ? Justifier

Résumé du cours

**Théorème:** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit A  $(x_0, y_0, z_0)$  et le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  tel

que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . L'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant 
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$
 est la droite  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ .

Le système précédent s'appelle représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ .

**Théorème:** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit A  $(x_0, y_0, z_0)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  deux

vecteurs non colinéaires. L'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant le

système 
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
 est le système précédent s'appelle représentation paramétrique du

plan  $\mathcal{P}(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**Théorème :** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Pour tout plan P, il existe quatre réels a, b, c et d vérifiant  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  tels que :

M(x, y, z) appartient à P si et seulement si  $ax + by + cz + d = 0$ .

L'équation  $ax + by + cz + d = 0$  est appelée équation cartésienne de P.

**Théorème:** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et a, b, c et d quatre réel tels que :

$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

L'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant l'équation  $ax + by + cz + d = 0$  est un plan.

**Théorème:** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

L'ensemble des points M(x, y, z) tels que 
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$
 est une droite, si et seulement si, les

triplets (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels.

**Théorème:** Soit A un point de l'espace et  $\vec{n}$  un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tel que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  est le plan passant par A et de vecteur normal à  $\vec{n}$

**Propriété:** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Si  $\mathcal{P}$  est un plan a pour équation

$ax + by + cz + d = 0$ , alors le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est normal à  $\mathcal{P}$ .

## LES EXERCICES

**Exercice 1** L'espace  $\zeta$  est rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1) Dans l'espace muni d'un repère cartésien  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère les droites

$$D: \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = -2\alpha + 2 \\ z = \alpha - 3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D': \begin{cases} x = -\beta + 1 \\ y = 2\beta + 5 \\ z = -\beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$$

- a) D et D' sont sécantes  
c) D et D' sont confondues

- b) D et D' sont strictement parallèles  
d) D et D' sont coplanaires

2) L'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que  $\begin{cases} x = \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\beta \end{cases}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , est :

- a) le plan d'équation cartésienne  $y=1$       b) le plan d'équation cartésienne  $x+z=0$   
c) La droite passant par le point A(0, 1, 0) et vecteur  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

3) L'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que  $\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 2 - \alpha - \beta \\ z = 3 \end{cases}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , est :

- a) le plan d'équation cartésienne  $z=3$       b) le plan d'équation cartésienne  $x+y=3$   
c) La droite passant par le point A(1, 2, 3) et vecteur  $\vec{i} - \vec{j}$

**Exercice 2:** On considère les points A(2 ; -3 ; 1), B(0 ; 1 ; 5) et C(-4 ; 5 ; 7). Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par C et parallèle à la droite (AB).

**Exercice 3 :** Les droites D et D' sont données par les représentations paramétriques suivantes :

$$D: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 3 - k \\ z = -1 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D': \begin{cases} x = 3 + k' \\ y = 2 - 2k' \\ z = m + 2k' \end{cases}, k' \in \mathbb{R}. \text{ Etudier, suivant les valeurs du réel } m, \text{ l'intersection des}$$

droites D et D'.

**Exercice 4:**

L'espace est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

1) Donner un système d'équations paramétriques de la droite passant par A (2;3;-1) et de vecteur

$$\text{directeur } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) On considère les points C(2;3;0) et D(-1;1;5). Donner un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

3) Etudier la position relative des droites D(A;  $\vec{u}$ ) et (CD).

**Exercice 5 :** Déterminer l'intersection du plan P d'équation :  $4x - y + 2z - 4 = 0$  et de la droite D de

représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - 3k, k \in \mathbb{R} \\ z = -2 + k \end{cases}$$

**Exercice 6 :** Dans l'espace  $\xi$ , rapporté à un repère cartésien  $R = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère la droite D passant par le point A (1; -1; 2) et de vecteur directeur  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ .

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite D. b) Le point B(3; 2; -1) appartient-il à D ?

2) Soit  $\Delta$  la droite définie par : 
$$\begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 3 + 2\alpha; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases}$$
 Donner un système d'équations cartésiennes de la

droite  $\Delta$ . 3) Déterminer  $D \cap \Delta$

**Exercice 7 :** On considère les plans P et P' d'équations respectives :  $2x + y - 2z - 3 = 0$  et  $x + y + 3z - 2 = 0$

1) Montrer que P et P' sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (D).

2) Etudier d'intersection de (D) avec le plan P'' d'équation :  $x + y - z - 6 = 0$ .

3) Retrouver, par le calcul direct, l'intersection des trois plans P, P' et P''.

**Exercice 8 :** Dans l'espace  $\xi$  rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les droites D et D'

définies par :  $D : \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}; (\alpha \in \mathbb{R})$  et  $D' : \begin{cases} x - 3z - 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

1) Montrer que les droites D et D' sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

2) Donner une équation cartésienne du plan P contenant D et D'.

3) Soit Q le plan d'équation cartésienne :  $2x - y - 5 = 0$ .

a) Montrer que les plans P et Q sont sécants suivant une droite  $\Delta$  dont on donnera un point et un vecteur

b) Montrer que les droites D et  $\Delta$  sont strictement parallèles.

**Exercice 9** Dans l'espace  $\xi$ , rapporté à un repère cartésien  $R = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les points :

A(1; 1; 1) ; B(2; 0; -1) ; C(-1; 2; -1) et E(2; -1; 3). 1) a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés

b) Déterminer une équation cartésienne du Plan P contenant A, B et C.

c) Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AE}$  sont-ils coplanaires ?

2) Soit  $\Delta$  l'ensemble des points M(x; y; z) de  $\xi$  tels que : 
$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que l'ensemble  $\Delta$  est une droite de  $\xi$  dont on précisera un point et un vecteur directeur.

b) Vérifier que E appartient à la droite  $\Delta$ .

c) Etudier la position relative de  $\Delta$  et (AB) d) En déduire l'intersection de  $\Delta$  et P.