

LES EXERCICES

Exercice 1 L'espace ζ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Dans l'espace muni d'un repère cartésien $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les droites

$$D: \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = -2\alpha + 2 \\ z = \alpha - 3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D': \begin{cases} x = -\beta + 1 \\ y = 2\beta + 5 \\ z = -\beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$$

a) D et D' sont sécantes

c) D et D' sont confondues

b) D et D' sont strictement parallèles

d) D et D' sont coplanaires

2) L'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que $\begin{cases} x = \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\beta \end{cases}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, est :

a) le plan d'équation cartésienne $y=1$

b) le plan d'équation cartésienne $x+z=0$

c) La droite passant par le point A(0, 1, 0) et vecteur $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

3) L'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que $\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 2 - \alpha - \beta \\ z = 3 \end{cases}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, est :

a) le plan d'équation cartésienne $z=3$

b) le plan d'équation cartésienne $x+y=3$

c) La droite passant par le point A(1, 2, 3) et vecteur $\vec{i} - \vec{j}$

Exercice 2: On considère les points A(2 ; -3 ; 1), B(0 ; 1 ; 5) et C(-4 ; 5 ; 7). Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par C et parallèle à la droite (AB).

Exercice 3 : Les droites D et D' sont données par les représentations paramétriques suivantes :

$$D: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 3 - k \\ z = -1 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D': \begin{cases} x = 3 + k' \\ y = 2 - 2k' \\ z = m + 2k' \end{cases}, k' \in \mathbb{R}. \text{ Etudier, suivant les valeurs du réel } m, \text{ l'intersection des}$$

droites D et D'.

Exercice 4:

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

1) Donner un système d'équations paramétriques de la droite passant par A (2;3;-1) et de vecteur

$$\text{directeur } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) On considère les points C(2;3;0) et D(-1;1;5). Donner un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

3) Etudier la position relative des droites D(A; $\vec{u}$) et (CD).

Exercice 5 : Déterminer l'intersection du plan P d'équation : $4x - y + 2z - 4 = 0$ et de la droite D de

$$\text{représentation paramétrique : } \begin{cases} x = k \\ y = 1 - 3k, k \in \mathbb{R} \\ z = -2 + k \end{cases}$$

Exercice 6 : Dans l'espace ξ , rapporté à un repère cartésien $R = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère la droite D passant par le point A (1; -1; 2) et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite D. b) Le point B(3; 2; -1) appartient-il à D ?

$$2) \text{ Soit } \Delta \text{ la droite définie par : } \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 3 + 2\alpha; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases} \text{ Donner un système d'équations cartésiennes de la}$$

droite Δ . 3) Déterminer $D \cap \Delta$

Exercice 7 : On considère les plans P et P' d'équations respectives : $2x + y - 2z - 3 = 0$ et $x + y + 3z - 2 = 0$

1) Montrer que P et P' sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (D).

2) Etudier d'intersection de (D) avec le plan P'' d'équation : $x + y - z - 6 = 0$.

3) Retrouver, par le calcul direct, l'intersection des trois plans P, P' et P''.

Exercice 8 : Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les droites D et D'

$$\text{définies par : } D \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}; (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ et } D' \begin{cases} x - 3z - 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que les droites D et D' sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I

2) Donner une équation cartésienne du plan P contenant D et D'.

3) Soit Q le plan d'équation cartésienne : $2x - y - 5 = 0$.

a) Montrer que les plans P et Q sont sécantes suivant une droite Δ dont on donnera un point et un vecteur

b) Montrer que les droites D et Δ sont strictement parallèles.

Exercice 9 Dans l'espace ξ , rapporté à un repère cartésien $R = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points :

A(1; 1; 1) ; B(2; 0; -1) ; C(-1; 2; -1) et E(2; -1; 3). 1) a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés

b) Déterminer une équation cartésienne du Plan P contenant A, B et C.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont-ils coplanaires ?

$$2) \text{ Soit } \Delta \text{ l'ensemble des points } M(x; y; z) \text{ de } \xi \text{ tels que : } \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que l'ensemble Δ est une droite de ξ dont on précisera un point et un vecteur directeur.

b) Vérifier que E appartient à la droite Δ .

c) Etudier la position relative de Δ et (AB) d) En déduire l'intersection de Δ et P.

RESUME DU COURS

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et soit α la mesure en radians de l'angle géométrique déterminé par deux représentants de même origine des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le réel défini par : a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

Conséquences : Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$ on a

a) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (lorsque $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que le vecteur $\vec{u}$ est unitaire). b) $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

a) Pour tout vecteur non nul de $\mathcal{W}$, le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ est unitaire.

b) Pour trois O, A et B de ξ : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cos \widehat{AOB}$

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ sont dits orthogonaux $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété : Soit O, A et B trois points de l'espace et H le projeté orthogonal de B sur (OA), alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$

Théorème : Soit A et B deux points de l'espace et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathcal{W}$. Alors les droites $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ sont orthogonales, si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition : Soit A un point de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur non nul et $\mathcal{P}$ un plan. On dit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ si la droite $\mathcal{D}(A, \vec{n})$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Conséquence : Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriétés : Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}(O, \vec{u}, \vec{v})$, si et seulement si, $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

Deux vecteurs non nuls $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont normaux à un même plan, si et seulement si, ils sont colinéaires

Propriété : Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

Définition : Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$ est dite orthogonale si les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux.

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de ξ est dit orthogonal si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale. Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$ est dite orthonormée si les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux. Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de ξ est dit orthonormé si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Propriétés : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

Pour tous vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

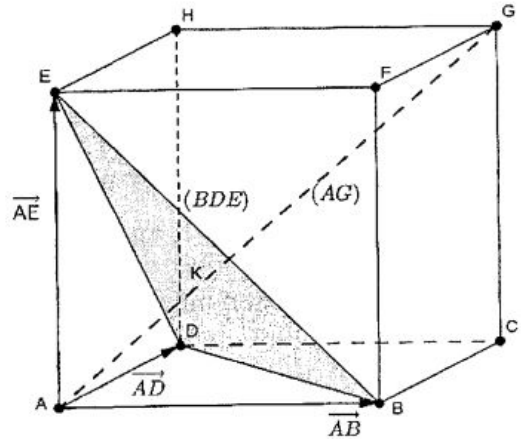
Pour tous points M(x, y, z) et M'(x', y', z') on a $MM' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

LES EXERCICES

Exercice 1 : Soit ABCDEFGH un cube de côté 1 ;

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- 1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.
- 2) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AG}$; en déduire que la droite (AG) et le plan (BDE) sont orthogonaux.
- 3) Montrer que le centre de gravité K du triangle BDE et le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE).
- 4) Déterminer une mesure à $0,1^\circ$ près de l'angle $\widehat{EKC}$.



Exercice 2 : Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle

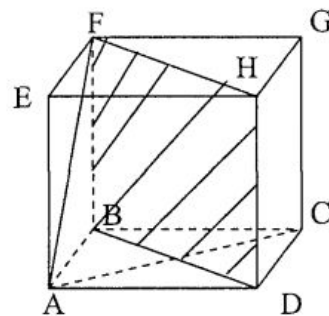
tel que : $AB = 3$; $AD = 4$ et $AE = 5$. On pose $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$.

- 1) Montrer que $\mathcal{B} = (\mathcal{A}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.
- 2) Déterminer les coordonnées des points C, E et G dans le repère $\mathcal{B}$.
- 3) Montrer que les droites (AG) et (CE) sont orthogonales.

Exercice 3 : On considère un cube ABCDEFGH.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

- 1) a) En utilisant le produit scalaire, montrer que les droites (AF) et (CH) sont orthogonales.
b) Vérifier que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$ et en employant une autre méthode retrouver le résultat du 1) a).
- 2) a) Montrer que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABCD)
b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 3) Montrer que la droite (AC) est perpendiculaire au plan (HDBF)

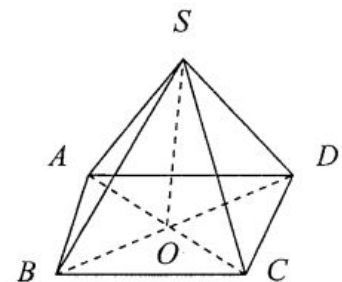


Exercice 4 : Dans un repère orthonormal de l'espace, soient les points $A(1; 2; -1)$, $B(3; 2; -1)$, $C(1; 4; -1)$ et $D(1; 2; 1)$.

- 1) Montrer que le tétraèdre ABCD est trirectangle (les triangle ABC, ACD et ADB sont des triangle rectangles)
- 2) Montrer que le triangle BCD est équilatéral.
- 3) Soit G le centre de gravité du triangle BCD ; montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BCD).

Exercice 5 : ABCDS est une pyramide dont la base ABCD est un carré de centre O. On suppose que O est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABCD) et que $AB = SO = a$; ($a > 0$)

- 1) a) Montrer que $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SO^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$
b) Exprimer en fonction de a le produit scalaire $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$
- 2) a) Déterminer la valeur de $\cos \widehat{ASC}$
b) Déterminer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{ASC}$.



Exercice N° 6: $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est une base orthonormée ; θ est un réel. On considère les vecteurs $\vec{U} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, $\vec{V} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ et $\vec{W} = \vec{k}$.

1) Montrer que $(\vec{U}; \vec{V}; \vec{W})$ est une base orthonormée.

2) Déterminer θ pour que $\vec{U}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{t} = 2\vec{i} + \vec{k}$

Exercice 7:

ABCD est un tétraèdre régulier de l'espace, d'arête a .

1) Montrer que les arêtes opposées, par exemple $[AB]$ et $[CD]$, ont pour supports des droites orthogonales.

2) Soit A' le centre de gravité du triangle BCD. Montrer que la droite (AA') est orthogonale au plan (BCD).

3) Soit G l'isobarycentre des points A, B, C et D .

Calculer $\overline{GA} \cdot \overline{GB}$. En déduire une valeur approchée à $0,1^\circ$ près de l'angle $\widehat{AGB}$.

Exercice 8 : ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Soit $I; J; K$ et L les milieux respectifs des arêtes $[EH]; [BF]; [BC]$ et $[DH]$. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1) a) Déterminer les coordonnées des sommets du cube.

b) En déduire les coordonnées des points $I; J; K$ et L .

c) Prouver que UKL est un rectangle dont les diagonales se coupent en O , centre du cube.

2) a) Calculer IJ, JK et IK

b) Déterminer $\cos \widehat{IOL}$. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{IOL}$.

Exercice 9: Soient x, y, z, a, b et c six réels quelconques. Montrer que $(xa + yb + zc)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)$.

Exercice 10 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points

$A(-1; 2; 1); B(1; -6; -1)$ et $C(2; 2; 2)$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points $A; B$ et C .

2) Soit Q le plan d'équation : $x + y - 3z + 2 = 0$ et Q' le plan de repère $(O; \vec{i}; \vec{k})$.

a) Montrer que les plans Q et Q' sont sécantes.

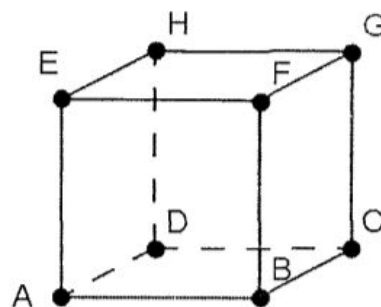
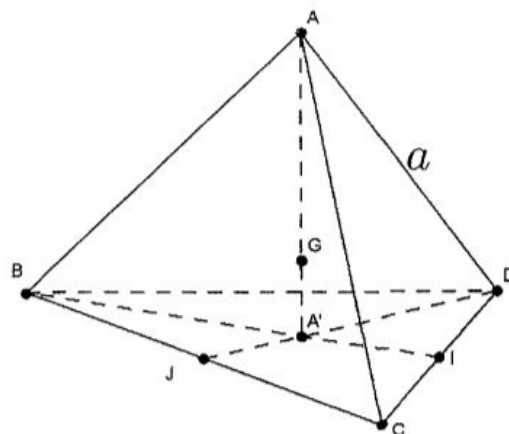
b) Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection Δ des plans Q et Q' .

Exercice 11 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points

$A(2, 1, -1); B(0, 2, 1)$ et $C(1, 2, -1)$. 1) a) Montrer que A, B et C déterminent un plan.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de (ABC) est : $2x + 2y + z - 5 = 0$

2) Soit la droite Δ :
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 - t \\ z = -4 - \frac{1}{2}t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$



- a) Montrer que Δ est perpendiculaire au plan (ABC) puis calculer les coordonnées de leur point d'intersection E.
 b) Vérifier que ABCE est un parallélogramme.
 3) a) Vérifier que le point K(-1; -3; -5) est un point de Δ . b) Calculer $d(B; \Delta)$

Exercice 12 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les plans (P) et (P') d'équations (P) : $2x - y + 2z - 5 = 0$; (P') : $2x + 2y - z - 4 = 0$

- 1) Montrer que $(P) \perp (P')$
 2) Calculer la distance du point A(1; 2; -1) à chacun des plans (P) et (P'). En déduire la distance du point A à la droite (D) d'intersection de (P) et (P').
 3) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (D).
 b) Déterminer par ses coordonnées, le point M de la droite (D) pour lequel la distance AM est minimale.

Exercice 13 : L'espace ξ est rapporté à un repère cartésien $R = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. A tout réel m ; on associe l'ensemble P_m des points M(x; y; z) de ξ tels que : $(m-1)x + my + (2-m)z + 3m - 1 = 0$.

- 1) Vérifier que, pour tout réel m, P_m est un plan.

2) Soit D la droite définie par :
$$\begin{cases} x = -3 + 2\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R})$$

- a) Déterminer m pour que D et parallèle à P_m ; b) D est-elle contenue dans un plan P_m ?
 3) montrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe Δ dont on donnera une représentation paramétrique.

4) Soit $\mathcal{D}'$ la droite passant par A(0; -2; 1) et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

- a) Déterminer $\mathcal{D}' \cap P_m$
 b) Montrer que, pour tout réel m, $\mathcal{D}'$ et P_m sont sécants et préciser $\mathcal{D}' \cap P_m$

Exercice 14 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Les points A, B et C sont définis par : $\vec{OA} = 3\vec{i}$; $\vec{OC} = \vec{k}$ et $OB = 2\vec{j}$.

On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

- 1) a) Montrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + 3y + 6z - 6 = 0$

b) Montrer que les coordonnées du point H sont : $H\left(\frac{12}{49}; \frac{18}{49}; \frac{36}{49}\right)$

- 2) Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

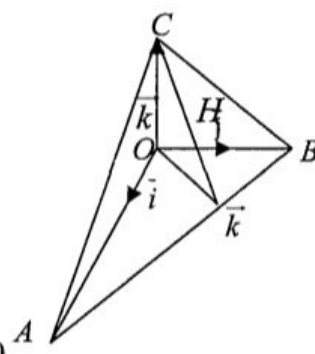
Exercice 15 : Dans la figure ci-contre $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé, ABCS est un tétraèdre tel que :

B(0; 4; 0) ; C(2; 0; 0) et S(0; 1; 4)

- 1) Le point I est le milieu du segment [AB]. Déterminer les coordonnées du point I.

2) M est le point de coordonnées (a; 0; 0) avec $a \in]0; 2[$.

Déterminer l'ensemble des points M lorsque le réel a varie.



3) Le plan P passant par I et perpendiculaire à la droite (IM) coupe la droite (BS) au point N.

- Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $ax - 2y + 4 = 0$
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BS)
- En déduire que le point N reste fixe lorsque le point M varie.

Exercice 16 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les points $A(1; 0; 1)$; $B(-1; 2; 2)$ et $C(-1; 0; 1)$

- Vérifier que ABC est un triangle rectangle en C.
 - Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant A, B et C.
- 2) Déterminer un système d'équations paramétriques de l'axe Δ du cercle (ABC)

3) Montrer que l'ensemble Q des points M de ζ tels que $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = -3$ est un plan perpendiculaire à la droite (AB)

- Vérifier que la droite Δ est parallèle au plan Q
- Soit M un point quelconque de Δ . Calculer la distance du point M à Q

Exercice 17 : Soit ABCDEFGH un parallélépipède tel que $AB = AE = 1$ et $AD = 2$. On désigne par I le milieu du segment [AD]. L'espace est muni d'un repère orthonormé $R(A; \overline{AB}; \overline{AI}; \overline{AE})$.

- Déterminer les coordonnées des points F, G et H.
 - Montrer que FIH est un triangle rectangle et calculer son aire.
- 2) a) Montrer qu'une équation du plan $P = (FIH)$ est : $2x + y - z - 1 = 0$. F
- Déterminer alors la distance du point G au plan $P = (FIH)$
 - Déterminer les coordonnées du point K d'intersection de (AG) et du plan (FIH).

Exercice 18 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On donne $A(0, 0, 2)$; $B(\sqrt{3}; 1; 0)$ et $C(\sqrt{3}; -1; 0)$

- Déterminer les coordonnées du point J le milieu du segment [BC].
 - Soit N un point du segment [OJ]. On pose $ON = t$. A quel intervalle appartient t ?
 - Soit P le plan passant par le point N et orthogonal à la droite (OJ). Le plan P coupe les arêtes [OC] ; [AC] ; [AB] et [OB] respectivement aux points R, S, T et U.
- Montrer que RSTU est un rectangle.
 - Soit $\mathcal{A}(t)$ l'aire du rectangle RSTU. Montrer que $\mathcal{A}(t) = \frac{4}{3}t(\sqrt{3} - t)$
 - Pour quelle valeur du nombre réel t, l'aire $\mathcal{A}(t)$ est-elle maximale ? Quelle est alors la nature géométrique du quadrilatère RSTU ?

