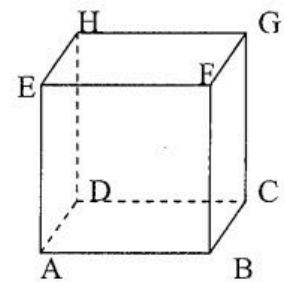


LES EXERCICES

Exercice 1 : Cocher la réponse exacte :

2) Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

- a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} =$ *) 0 ; **) 1 ; ***) $\sqrt{2}$
 b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ *) $\sqrt{2}$; **) 1 ; ***) 2
 c) $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} =$ *) $\overrightarrow{AE}$; **) $\overrightarrow{EA}$; ***) $\overrightarrow{AC}$
 d) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DH} =$ *) $\overrightarrow{DB}$; **) $\overrightarrow{BD}$; ***) $\overrightarrow{AF}$



3) Dans l'espace qui est rapporté à un repère orthonormé direct, on donne trois points non

alignés A , B et C alors : a) $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} =$ *) $\vec{0}$; **) $\overrightarrow{AC}$; ***) 0

b) L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ est :

*) (AB) ; **) $\{A; B\}$; ***) Le plan perpendiculaire à la droite (AB) et passant par A .

c) L'ensemble des points M de l'espace tel que $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ est :

*) le plan (ABC) ; **) (AB) ; ***) La droite passant par A et perpendiculaire au plan (ABC) .

4) Soit A , B et C trois points non alignés et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan (ABC) alors :

a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{n}$; b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{n}$; c) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \alpha \vec{n}$; $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Exercice 2 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(3; 2; 4)$; $B(0; 3; 5)$; $C(0; 2; 1)$ et $D(3; 1; 0)$.

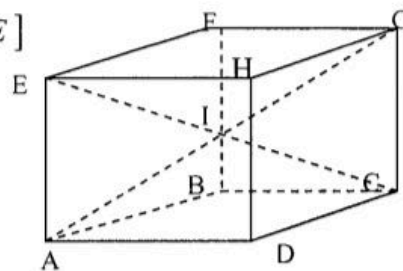
- 1) a) Montrer que ABCD est un parallélogramme ; b) Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.
- 2) Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$. Déterminer les coordonnées du point E.
- 3) Calculer le volume v du prisme droit de base ABCD et de hauteur $[AE]$

Exercice 3 : On considère un cube ABCDEFGH.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

On désigne par I le centre du carré ABCD.

- 1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$
- 2) Déterminer l'ensemble Δ des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$
- 3) Déterminer l'ensemble P des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BM} = 0$



Exercice 4 : Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

- 1) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AE}$
- 2) Montrer que $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH} = 2$ en déduire que $\sin(\widehat{HBG}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 3) a) Vérifier que $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{BG}$ et que $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{BH}$; b) Déterminer alors $\overrightarrow{BG} \wedge \overrightarrow{BH}$

Exercice 5 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(0; 1; 1)$; $B(1; 0; 0)$; $C(-1; 2; 1)$ et $D(0; 1; 2)$.

- 1) a) Calculer $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$; b) En déduire que les points A, B, C et D sont coplanaires.
- 2) Montrer que $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CB}$

Exercice 6 : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace ξ .

On donne les points $A(1; -2; -1)$; $B(1; 3; 1)$ et $C(5; 6; 5)$

- 1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
- b) En déduire que A, B et C ne sont pas alignés puis calculer l'aire du triangle ABC
- 2) a) Calculer le volume du tétraèdre OABC . b) En déduire la distance du point O au plan (ABC)
- 3) Calculer le volume du parallélépipède ayant pour arêtes $[OA]$; $[OB]$ et $[OC]$.

Exercice 7 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(-1; 2; 3)$; $B(0; 4; 4)$; et $C(2; 0; 2)$

- 1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. ; 2) Calculer l'aire du triangle ABC.
- 3) Calculer $\cos \widehat{BAC}$ et $\sin \widehat{BAC}$; 4) Calculer la distance de C à la droite Δ passant par A et B

Exercice 8 : On considère un cube ABCDEFGH. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$. On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par K le centre du carré ADHE.

- 1) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BK}$; $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IA}$
 b) Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$; c) En déduire l'aire du triangle AGI.
 2) a) Calculer le volume v du tétraèdre ABGI ; b) En déduire la distance d du point B au plan (AGI)

Exercice 9 : Répondre par Vrai ou Faux avec justification :

- 1) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = -2\vec{u} \wedge \vec{v}$; 2) Si la famille $\{\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\}$ est liée alors $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{w}$
 3) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ; $\left(\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right)^2 + \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right)^2 = 1$; 4) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v}$

Exercice 10 : Les deux questions sont indépendantes.

- 1) Soient x, y, z, a, b et c six réels quelconques. Montrer que $(xa + yb + zc)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)$.
 2) Soient x, y, z, a, b et c six réels que $\frac{x}{a} \neq \frac{y}{b}$.

Montrer que $(yc - zb)^2 + (xc - za)^2 + (xb - ya)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)$.

Exercice 11 : Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1 tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ est une base directe.

Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{FG}$; $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BG}$

Exercice 12 : Soit A ; B et C trois points non alignés de l'espace.

- 1) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{0}$
 2) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$

Exercice 13 : L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. Montrer que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$.

Exercice 14 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points

A (-1; 2; 1) ; B (1; -6; -1) et C (2; 2; 2).

- 1) a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
 b) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points A ; B et C.
 2) Soit Q le plan d'équation : $x + y - 3z + 2 = 0$ et Q' le plan de repère $(O; \vec{i}; \vec{k})$.
 a) Montrer que les plans Q et Q' sont sécantes.
 b) Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection Δ des plans Q et Q'.