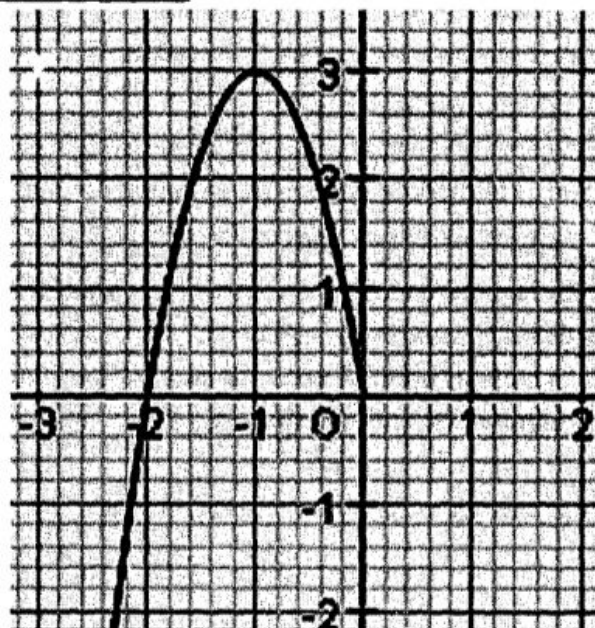




LES EXERCICES

Exercice N°1 : La courbe représentative d'une fonction impaire f définie sur $\mathbb{R}$ et partiellement tracée ci-contre.

- 1) Acheter le tracé.
- 2) a) Déterminer les variations de f sur $[0; 2]$.
- b) Résoudre l'inéquation
- 3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f^2(x)$.
- a) Etudier la parité de g .
- b) Soit a et b deux réels de $]-\infty; -2]$ tels que $a < b$, comparer $g(a)$ et $g(b)$, en déduire le sens de variations de g sur $]-\infty; -2]$
- c) Etudier les variations de g sur $[-2; 0]$



Exercice N°2 :

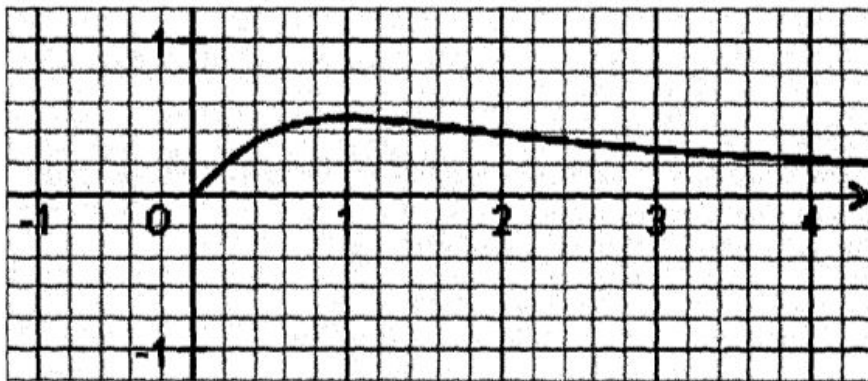
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

- 1) Montrer que la fonction f est impaire.
- 2) Soit g la restriction de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- a) Montrer que 4 est un minorant de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b) Le réel 4 est-il un minimum de g ?
- 3) Montrer que la restriction de f sur $\mathbb{R}_-^*$ admet un maximum que l'on précisera.

Exercice N°3 : Dans la figure ci-contre, on a représenté la restriction

à $\mathbb{R}_+$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$.

- 1) Acheter la représentation graphique de f .
- 2) Déterminer un majorant et un minorant de f sur $\mathbb{R}$.
- 3) a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$



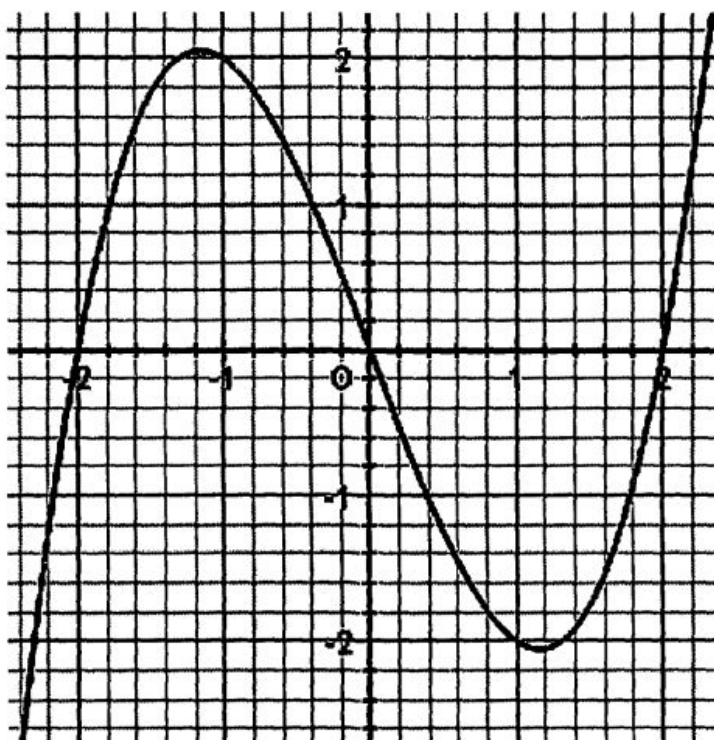
- b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq \frac{1}{2}x$.
- 4) On pose $g(x) = |f(x)|$. a) Tracer la courbe (ξ_g) de g dans le même repère.
- b) En quelles valeurs la fonction g atteint-elle son maximum ?

Exercice 4 : Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x - 1$.

- 1) Montrer que (-2) est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) Soit la fonction $g : x \mapsto -x^2 - 4x$. a) Montrer que 2 est un majorant de g sur $\mathbb{R}$.
- b) Le réel 2 est-il maximum de la restriction de f à $[3; 6]$?

Exercice N°5 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ci-contre :

- 1) Examiner la parité de f .
- 2) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) a) Dresser le tableau de variation de g la restriction de f à l'intervalle $[-2; 2]$
- b) Donner un maximum atteint par g puis en déduire deux majorants de g .
- c) Donner un minimum atteint par g puis en déduire deux minorants de g .
- d) g est-elle bornée ?
- 4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.



Exercice 6 : Le tableau ci-dessous est celui de des variations d'une fonction f .

x	-2		1		9
$f(x)$					

$\swarrow$ (from -2 to 1) $\nearrow$ (from 1 to 9)

- 1) Montrer que $f(1)$ est la valeur minimale de f .
- 2) Posons $g(x) = -2f(x) \quad \forall x \in [-2, 9]$. Dresser le tableau de variation de g .

Exercice 7 : On considère une fonction f , définie et continue sur un intervalle $[-3; 4]$, dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3		1		4
$f(x)$			5		

$\nearrow$ (from -3 to 1) $\searrow$ (from 1 to 4)

- 1) Préciser le minimum de f sur chacun des intervalles : $[-3; 4]$ et $[1; 2]$.
- 2) a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; 4]$
- b- En déduire la position relative de ζ_f de la fonction f par rapport à l'axe des abscisses.
- 3) Justifier que la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{11-2f(x)}}$ est définie sur $[-3; 4]$.

Exercice 8 : Soit la fonction $f(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{-x^4 + 4x^2}$. 1) a) Déterminer D_f . b) Montrer que f est paire.

- 2) a) Vérifier qu'il existe $x \in D_f$, tel que $f(x) = \frac{3}{4 - (x^2 - 2)^2} - 1$

b) Montrer que f est minorée sur $]0, \sqrt{2}[$. c) Montrer que 0 est le minimum de f sur $]\frac{1}{2}, \sqrt{2}[$.

Exercice 9 : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$

1) Montrer que f est impaire. 2) Montrer que $\forall x \geq 0$, On a : $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{3}$

3) En déduire que $f(x) \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $x \in \mathbb{R}$

Exercice 10 : Soit la fonction $f(x) = \frac{-4x^2 + 16x - 17}{x^2 - 4x + 5}$

Déterminer la valeur du réel x pour lequel $f(x)$ est maximale.

Exercice 11 : A- Soit la fonction $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$

1) Déterminer D_f . 2) Montrer que $f(2)$ est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}_+^*$

B- On veut fabriquer un réservoir d'eau de volume 400 litres, son couvercle ayant la forme d'un parallélépipède de base un carré de côté x et de hauteur h .

1) Déterminer en fonction de x et h le volume de réservoir.

2) Exprimer en fonction de x l'aire A du réservoir.

3) Déterminer x pour que la quantité du métal utilisé pour fabriquer ce réservoir soit minimale.

Déterminer la valeur de h correspondante.

Exercice 12 : La fonction f est définie pour les entiers n et k par :

$$\begin{cases} f(0, n) = n + 1 \\ f(k, 0) = f(k - 1, 1) \\ f(k + 1, n + 1) = f(k, f(k + 1, n)) \end{cases} \quad \text{Calculer le nombre } f(2, 2).$$

Exercice 13 : Déterminer l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} ; -x^2 + f(x) + x f(-x) = 0$

Exercice 14 : On définit pour chaque couple de réels (a, b) la fonction f par : $f(x) = a - \sqrt{x + b}$.

Deux nombres réels u et v distincts sont dites échangeables s'il existe au moins un couple (a, b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1) Montrer que 2 et 3 sont échangeables.

2) Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?

3) A quelle condition deux entiers u et v sont-ils échangeables ?

Exercice 15 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$S_n(x_i) = x_1^1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_n^n$ et on suppose $S_2 = S_3 = S_4$. Montrer que $\forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$ on

a $x_i = 0$ ou $x_i = 1$. Exprimer d'abord $S_n((x_i^2 - x_i)^2)$ en fonction de S_2, S_3 et S_4

Exercice 16 : 1) Etablir que $\forall x \in [0; 1] ; 0 \leq x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$

2) En déduire que $\forall (a, b, c) \in [0; 1]^3 ; \min[a(1 - b); b(1 - c); c(1 - a)] \leq \frac{1}{4}$

Exercice 17 : Trouver les couples d'applications (f, g) de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$,

$$[f(x)]^{g(y)} + [f(y)]^{g(x)} = x + y$$