

### Exercice 1

On considère le système d'équations linéaires ci-contre :

$$(S) \begin{cases} x + 2y - z = 3 & L_1 \\ 2x + y + z = 0 & L_2 \\ -x + 2y - z = -1 & L_3 \end{cases}$$

1) a) En effectuant une combinaison linéaire entre  $L_1$  et  $L_2$ , éliminer  $x$ . On nommera cette nouvelle équation  $L'_2$ .

b) En effectuant une combinaison linéaire entre  $L_1$  et  $L_3$ , éliminer  $x$ . On nommera cette nouvelle équation  $L'_3$ .

c) Ecrire le système formé par les équations  $L_1$ ;  $L'_2$  et  $L'_3$ .

2) a) En effectuant une combinaison linéaire entre  $L'_2$  et  $L'_3$ , éliminer  $y$ . On nommera cette nouvelle équation  $L''_3$ .

b) Ecrire le système formé par les équations  $L_1$ ;  $L'_2$  et  $L''_3$ .

En déduire la solution dans  $\mathbb{R}^3$  du système (S).

### Exercice 2

Soit le système ci-contre :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 2 \\ -3x - y + z = -4 \end{cases}$$

En utilisant la méthode du Pivot de GAUSS, résolvons dans  $\mathbb{R}^3$  le système ci-dessus :

### Exercice 3

Soit le système ci-contre :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ x + 3y - 2z = -1 \\ 3x + 5y + 8z = 8 \end{cases}$$

En utilisant la méthode du Pivot de GAUSS, résolvons dans  $\mathbb{R}^3$  le système ci-dessus :

### Exercice 4

Résoudre les systèmes linéaires suivants:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

### Exercice 5

Une entreprise fabrique des jouets en bois qui nécessitent pour :

- un camion : 2 kg de bois et 3 heures de travail;
- un pantin : 500 g de bois et 4 heures travail;
- un chien a trainer : 800 g de bois et 3,5 heures de travail.

Déterminer le nombre de camions, de pantins et de chiens fabriqués pendant une journée si l'on utilise exactement 91 kg de bois, 313 heures de travail et que l'on fabrique 89 objets au total.

### Exercice 6

Dans un même magasin, trois amis achètent les mêmes types d'articles :

- Salah: 1 feutre, 2 stylo à bille et 1 marqueur pour 4,500 dinars
- Ali : 1 feutres, 1 stylos à bille et 1 marqueurs pour 2,700 dinars.
- Farid : 3 feutres, 1 stylos à bille et 1 marqueur pour 3,500 dinars.

Déterminer le prix de chaque article.

### Exercice 1 :

1)a)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + z = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -3y + 3z = -6 \\ -x + 2y - z = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L'_2 \Leftrightarrow -2L_1 + L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

b)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -3y + 3z = -6 \\ -x + 2y - z = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -3y + 3z = -6 \\ 4y - 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L'_3 \Leftrightarrow L_1 + L_2 \end{matrix}$$

c)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -3y + 3z = -6 \\ 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

2)a)

b)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y - z = 2 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y - z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L'_2 \\ L''_3 \Leftrightarrow -2L'_2 + L'_3 \end{matrix}$$

$$c) \begin{cases} x + 4y - z = 5 & L_1 \\ y - z = 2 & L'_2 \\ z = 1 & L''_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{(2; -1; -3)\}$$

### Exercice 2 :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 & L_1 \\ 2x + y - z = 2 & L_2 \\ -3x - y + z = -4 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 & L_1 \\ y + 3z = 2 & L'_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 2y + 4z = 2 & L'_3 \leftarrow 3L_1 + L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 & L_1 \\ y + 3z = 2 & L'_2 \\ 2z = 2 & L''_3 \leftarrow 2L'_2 - L'_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 & L_1 \\ y + 3z = 2 & L'_2 \\ z = 1 & L'''_3 \leftarrow \frac{1}{2}L''_3 \end{cases}$$

On a:  $z = 1$

$$y + 3z = 2 \Rightarrow y = 2 - 3 \times 1 \Rightarrow y = -1$$

$$x + y + z = 2 \Rightarrow x - 1 + 1 = 2 \Rightarrow x = 2$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{(2; -1; 1)\}$$

### Exercice 3 :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 & L_1 \\ x + 3y - 2z = -1 & L_2 \\ 3x + 5y + 8z = 8 & L_3 \end{cases}$$

On conserve la ligne  $L_1$ , qui sert de pivot pour éliminer l'inconnue  $x$  des autres lignes; pour cela, on retire  $L_1$  à  $L_2$ , et 3 fois  $L_1$  à  $L_3$ . On obtient :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 & L_1 \\ y - 4z = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y + 2z = 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

On conserve alors la ligne  $L_2$  qui sert de pivot pour éliminer  $y$  de la troisième ligne; pour cela, on remplace la ligne  $L_3$  par  $L_3 + L_2$ . On trouve :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 & L_1 \\ y - 4z = -3 & L_2 \\ -2z = -1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Ce dernier système, triangulaire, est facile à résoudre : la dernière ligne donne  $z$ , en reportant, la deuxième ligne donne  $y$ , etc...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{(3; -1; \frac{1}{2})\}$$

#### Exercice 4 :

On va utiliser la méthode du pivot de Gauss. Pour le premier système, on écrit

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 & L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ -y - 3z = -6 & L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 \\ -4z = -8 & L_3 + L_2 \rightarrow L_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour le second système, on procède de la même façon :