

LES EXERCICES

Exercice n°1 : Pour chacune des questions suivantes indiquées la bonne réponse :

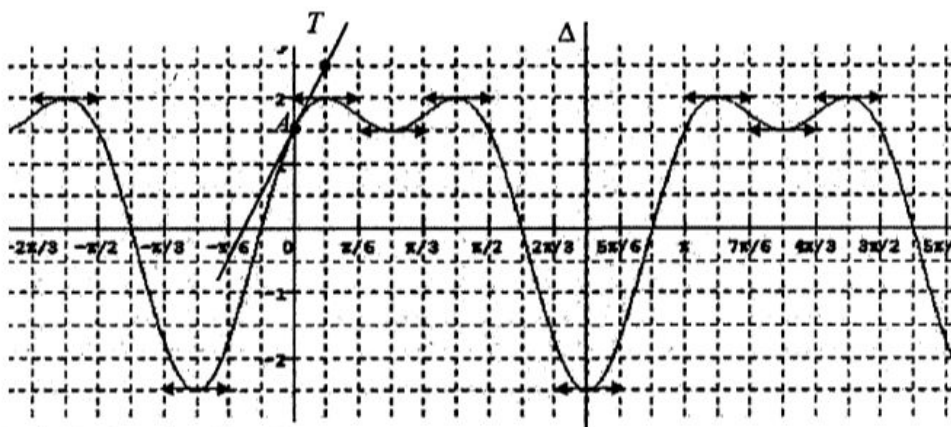
- 1) Pour tout x , $\left| \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \right| \leq \dots$ a) $x - \frac{\pi}{4}$ b) $\left| x - \frac{\pi}{4} \right|$ c) $\frac{\pi}{4} - x$
- 2) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x - 1\right)$ est périodique de période :
- a) 2π b) 4 c) 2
- 3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x) \cos(x)$. La fonction est périodique de période
- a) 2π ; b) π ; c) $-\pi$
- 4) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2(x)$. a) la fonction f périodique de période :
- * $\frac{\pi}{4}$ ** π *** $\frac{\pi}{2}$
- b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est égale à :
- * $\cos^2 x$ ** $\sin(2x)$ *** $-2\cos x \sin x$
- c) La courbe représentative ζ_f de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, admet :
- * un centre de symétrie $I\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ ** Au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y=x$

*** Un axe de symétrie d'équation : $x=0$

Exercice n°2 : Le graphique ci-contre représente une partie d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

- $\Delta : x = \frac{3\pi}{4}$ est un axe de symétrie pour la courbe ζ_f
- T la tangente à ζ_f au point $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$.



➤ On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Par lecture graphique :

- 1) a) $f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - f(x) = 0$ b) $f\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) - f(x) = 0$ c) $f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + f(x) = 0$
- 2) a) $f'(0) = \frac{\pi}{12}$ b) $f'(0) = \frac{3}{2}$ c) $f'(0) = \frac{12}{\pi}$
- 3) a) $f'\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 0$ b) $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) < f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ c) $f'(x) \geq 0$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right]$.

4) f est périodique de période : a) $\frac{\pi}{2}$ b) π c) 2π

5) $f\left(\frac{135\pi}{12}\right) =$ a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{5}{2}$ c) 2

Exercice 3 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \sin 2x$

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative ζ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Dédire la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto |\sin 2x|$.

3) Déterminer la période de g .

Exercice 4 : Soit f la fonction par : $f(x) = 2\cos(x) + \cos(2x)$. On note par ζ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. 1) Etudier la parité de f puis vérifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$.

2) Dresser le tableau d variation de f sur $[0, \pi]$. 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = -1$.

4) Construire la partie de ζ dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. 5) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x^2}$

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sin^2 x + 4\sin x$. On note ζ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est 2π périodique puis dresser son tableau de variation sur $[-\pi, \pi]$

2) Déterminer les points d'intersection de ζ et l'axe des abscisses.

3) Tracer la partie de ζ dans $[-2\pi; 2\pi]$

4) Soit $g(x) = -2\sin^2 x + 4\sin x$. a) Calculer $g(x) + f(x + \pi)$.

b) En déduire une construction de ζ_g à partir de ζ puis tracer la partie de ζ_g sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 6 :

1) Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos^2 x + \cos^2(3x)$. Montrer que $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0; 2]$

2) Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \cos x + \cos(3x)$

a) Montrer qu'il existe un réel $a \leq 0$ tel que $g\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [a; 2]$

b) Montrer que $g\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{8}$; c) En déduire que $a \in \left[-1; -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right]$

Exercice 7 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{3} \sin 2x - 2 \sin^2 x + 1$

1) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Etudier f et tracer sa courbe représentative (ζ) dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Vérifier que les droites $(D_k : x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z})$ sont des axes de symétrie de la courbe (ζ) .

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(f(x) = 1)$.

b) Résoudre graphiquement dans $[0, \pi]$, l'inéquation $(\sqrt{3} \sin 2x \geq 2 \sin^2 x)$.

5) Soit la fonction $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{3} \sin 2|x| - 2 \sin^2 x + 1 \quad \text{Tracer la courbe de } g \text{ dans le même repère } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

Exercice 8 : Soient les fonctions $f : x \mapsto 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $g : x \mapsto 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

1) Etudier chacune des fonctions f et g et tracer les courbes représentatives ζ et ζ' dans le plan rapporté à un repère orthogonale.

Vérifier que ζ' est l'image de ζ par une translation dont-on déterminera le vecteur.

2) Soit la fonction h définie sur $[0, 2\pi]$ par : $h(x) = |\cos x| + \sqrt{3} |\sin x|$

Utiliser les courbes ζ et ζ' pour tracer la courbe représentative de h .

EXERCICE 9 : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

1) Etudier les variations de f sur $[0; \pi[$; 2) Construire la courbe de f .

3) En déduire la construction de la courbe de la fonction g définie sur $[-\pi; \pi]$ par

$$g(x) = -2 \sin\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right)$$

EXERCICE 10 : Soit la fonction f définie par $f(x) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

1) Montrer que la droite $D : x = -\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe de f .

2) Montrer que le point $E\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ est un centre de symétrie à la courbe de f .

3) Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et construire ζ_f .

Exercice 11 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a \cos(2x) + b$ avec a et b des réels et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le tableau de variation de f sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ est le suivant :

1) Montrer que $a = 2$ et que $b = 1$

2) a) Résoudre dans $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ l'équation $f(x) = 0$.

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	1	-1	1

- b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$
- 3) a) Montrer que $I\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ est un centre de symétrie de (C)
- b) Montrer que l'étude de f se réduit à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$
- c) Construire la portion (C_0) de (C) relative à $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ en précisant les points de rencontre de (C_0) avec les axes de repère.
- d) Soit g la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ par $g(x) = [f(x)]^2$. Dresser le tableau de variation de g .

Exercice 12 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \tan(ax + b)$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

- 1) Déterminer a et b pour que la période de f soit égale à 2π et que la courbe ζ passe par le point $I\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$.
- 2) On prend $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{\pi}{3}$. a) Etudier la variation de f sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right[$. b) Tracer la courbe ζ .

Exercice 13 : le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$ deux points du cercle trigonométrique de centre O . Soit θ un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, On désigne par M le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi]$.

- 1) a) Montrer que $AM = 2 \sin \frac{\theta}{2}$. b) Montrer que $BM = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$
- 2) a) Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = 2 \sin x + 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
- b) Dresser la tableau de variation de f sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.
- c) En déduire la valeur de θ pour laquelle $AM + BM$ est maximale.

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) + 2\sqrt{2} - 4}{2x - \pi}$.