

LES EXERCICES

EXERCICE 1 : La ville A compte une population de 34 000 habitants en 2007. On observe depuis que chaque année, sa population augmente de 3%. On note $U_0 = 34000$ le nombre d'habitants de la ville A au 1er janvier 2007, et U_n le nombre de ses habitants au 1er janvier de l'année $(2007+n)$. On arrondira au besoin les nombres d'habitants à l'unité.

1. Vérifier que $U_1 = 35020$ puis calculer U_2 .
- a. Pour tout entier naturel n , exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .
- b. En déduire la nature de la suite (U_n) . c. Déterminer alors U_n en fonction de n .

2. Selon ce modèle : a. Calculer la population de la ville A au 1er janvier 2012.
- b. À partir de quelle année la population de la ville A dépassera-t-elle 50 000 habitants ?

EXERCICE 2 : La ville B, qui comptait 45 000 habitants au 1er janvier 2007, perd chaque année 500 habitants. On note V_0 le nombre d'habitants de la ville B au 1er janvier 2007, et V_n le nombre d'habitants au 1er janvier de l'année $(2007+n)$. On a ainsi $V_0 = 45000$.

1. Montrer que $V_1 = 44500$ puis calculer V_2 .
2. a. Pour tout entier naturel n , exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .
- b. En déduire la nature de la suite (V_n) . c. Déterminer alors V_n en fonction de n .
3. Selon ce modèle, calculer la population de la ville B au 1er janvier 2012.

EXERCICE 3 : Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} - U_n = n + 1; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) a) Calculer U_1 et U_2 b) La suite (U_n) est-elle arithmétique ?
- 2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_{n+1} - U_n; n \in \mathbb{N}$
 - a) Montrer que (V_n) est arithmétique. ; b) Soit $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$; Exprimer S_n en fonction de n .
- 3) Montrer que $S_n = 1 + U_{n+1}; n \in \mathbb{N}$
- 4) Exprimer U_n en fonction de n .

EXERCICE 4 : Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 ; U_1 = 2 \\ U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n \end{cases}$.

- 1) Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ est géométrique.
- 2) Exprimer V_n en fonction de n .
- 3) Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$
- 4) Exprimer U_n en fonction de n .

EXERCICE 5 : Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^n} + n \end{cases}$.

- 1) Exprimer en fonction de n la somme suivante : $\sum_{k=0}^{n-1} (U_{k+1} - U_k)$
- 2) En déduire l'expression de U_n en fonction de n .

EXERCICE 6 : Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$. 1) Vérifier que $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$. 2) Calculer S_n .

Exercice 7 : Soit $X \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = X^n$.

- 1) Déterminer la nature de la suite V_n .
- 2) Calculer la somme suivante $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$.
- 3) Montrer que $2^n \geq n+1$.

Exercice 8 : 1) À partir d'un nombre donné, on construit une suite de nombres de la façon suivante : chaque nombre est la somme des carrés des chiffres du nombre précédent.

Ainsi, si le premier nombre est 2 332 011,

le deuxième nombre est $2^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 = 28$

le troisième nombre est $2^2 + 8^2 = 68$ et ainsi de suite.

Calculer le 2011ème nombre de cette suite.

2) Calculer le 2011ème nombre de la suite obtenue en partant du nombre 1248.

EXERCICE 9 : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

- 1) Calculer U_1 ; U_2 et U_3
- 2) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ On a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ On a : $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

EXERCICE 10 : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $S_n = \sum_{k=1}^n U_k = 2n^2 + n$; $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Exprimer U_n en fonction de n .
- 2) Déterminer la nature de la suite (U_n)

3) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{2} \\ V_{n+1} = \frac{V_n}{\sqrt{1+4V_n^2}} \end{cases}$$

a) Montrer que ; $V_n > 0$. b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$; $V_n^2 = \frac{1}{1+U_n}$

c) Exprimer V_n en fonction de n .

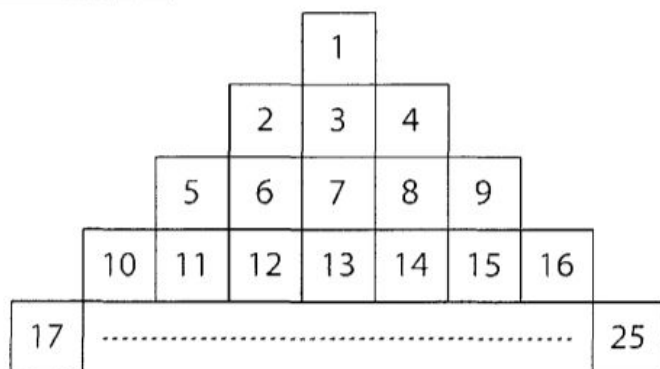
EXERCICE 11 : Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ On a : $0 < U_n < 2$

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ On a : $2 - U_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - U_n)$. b) En déduire que $0 < 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3) a) Montrer que $U_n = 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$. b) En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 12 :



On écrit les entiers naturels comme indiqué sur le schéma ci dessus où on s'est arrêté à 25.

1) Quel sera l'entier écrit au bout de la 18ème ligne?

2) Sur quelle ligne est écrit 2 010?

EXERCICE 13 : 26 personnes dont les âges sont respectivement chacun des entiers compris entre 35 et 60 sont assises autour d'une table. Montrer qu'il existe 4 personnes assises côte à côte dont la somme des âges est inférieure ou égale à 190

Exercice 14 : Cocher la réponse exacte :

1) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = (-0.8)^n$ alors :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$; U_n n'a pas de limite

4) Soit la suite U_n définie sur $\mathbb{R}$ par $U_n = \frac{(\sqrt{2})^n}{10^3}$ alors :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$; c) n'a pas de limite

5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}$ est : a) $+\infty$; b) 1 ; c) n'admet pas de limite.

6) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \frac{3^n}{(-7)^{n+1}}$

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{-3}{7}$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ c) n'admet pas de limite

8) Si $U_n = 1 - 2 + 4 + \dots + (-1)^n 2^n; \forall n \in \mathbb{N}$ alors :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{3}$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$; c) U_n n'a pas de limite.

9) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, on suppose que $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$ est convergente alors

a) (S_n) est croissante b) (S_n) est décroissante c) (U_n) converge

10) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \frac{2 + (-3)^n}{1 + 5(-3)^n}$

a) (U_n) admet une limite finie ; b) (U_n) admet une limite infinie c) (U_n) n'admet pas de limite

EXERCICE 15 : Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \frac{n}{3^n}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$; b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \leq 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n$

2) Soit $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$. Montrer que (S_n) est croissante et majorée par 2.

EXERCICE 16 : Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4 - U_n^2}}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $0 < U_n < \sqrt{2}$

2) a) Calculer $U_{n+1}^2 - U_n^2$ en fonction de U_n . b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} > U_n$.

3) Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{2 + U_n^2}{2 - U_n^2}$. a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

b) Exprimer V_n en fonction de n . c) En déduire que $U_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$.

4) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n (k U_{k-1}^2)$.

5) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \sqrt{2}| < \frac{2}{n+1}$. b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

EXERCICE 17: Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 16}{U_n - 6} \end{cases}$$

1) a) Calculer U_1 et U_2 b) Vérifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n < 4$

3) Dédurre que la suite (U_n) est croissante

4) Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 4}$ a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique.

b) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n . c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

EXERCICE 18: Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$\begin{cases} U_1 = \frac{6}{5} \\ U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n > 1$. 3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

4) Montrer que la suite (V_n) définie sur $V_n = U_n - 1$ est géométrique.

5) a) Montrer que la suite (V_n) converge vers 0 et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

EXERCICE 19: Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2 - U_n} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ On a : $0 < U_n \leq \frac{1}{2}$

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ On a : $U_{n+1} \leq \frac{2}{3}U_n$. b) En déduire que (U_n) est décroissante

3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ On a : $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n U_0$

4) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{1}{U_n} - 1$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique

b) Exprimer (U_n) en fonction de n .

5) Soit $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{U_k}$.a) Exprimer S_n en fonction de n . b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$