

LES EXERCICES

Exercice 1 L'espace ζ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Dans l'espace muni d'un repère cartésien $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les droites

$$D: \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = -2\alpha + 2 \\ z = \alpha - 3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D': \begin{cases} x = -\beta + 1 \\ y = 2\beta + 5 \\ z = -\beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$$

a) D et D' sont sécantes

c) D et D' sont confondues

b) D et D' sont strictement parallèles

d) D et D' sont coplanaires

2) L'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que $\begin{cases} x = \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\beta \end{cases}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, est :

a) le plan d'équation cartésienne $y=1$

b) le plan d'équation cartésienne $x+z=0$

c) La droite passant par le point A(0, 1, 0) et vecteur $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

3) L'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que $\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 2 - \alpha - \beta \\ z = 3 \end{cases}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, est :

a) le plan d'équation cartésienne $z=3$

b) le plan d'équation cartésienne $x+y=3$

c) La droite passant par le point A(1, 2, 3) et vecteur $\vec{i} - \vec{j}$

4) Dans l'espace ζ , on considère un triangle ABC. L'ensemble des points M de l'espace tel que

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est : a) {c} b) le plan passant par C et perpendiculaire à (AB)

c) La droite passant par le point C orthogonale à (AB)

Exercice 2: On considère les points A(2 ; -3 ; 1), B(0 ; 1 ; 5) et C(-4 ; 5 ; 7). Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par C et parallèle à la droite (AB).

Exercice 3: Les droites D et D' sont données par les représentations paramétriques suivantes :

$$D: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 3 - k \\ z = -1 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D': \begin{cases} x = 3 + k' \\ y = 2 - 2k' \\ z = m + 2k' \end{cases}, k' \in \mathbb{R} \quad . \text{Etudier, suivant les valeurs du réel } m, \text{ l'intersection des}$$

droites D et D'.

Exercice 4: L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

1) Donner un système d'équations paramétriques de la droite passant par $A(2;3;-1)$ et de vecteur

directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) On considère les points $C(2;3;0)$ et $D(-1;1;5)$. Donner un système d'équations paramétriques de la droite (CD) .

3) Etudier la position relative des droites $D(A; \vec{u})$ et (CD) .

Exercice 5 : Déterminer l'intersection du plan P d'équation : $4x - y + 2z - 4 = 0$ et de la droite D de

représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - 3k, k \in \mathbb{R} \\ z = -2 + k \end{cases}$$

Exercice 6 : Dans l'espace ξ , rapporté à un repère cartésien $R = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère la droite D passant par le point $A(1; -1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite D . b) Le point $B(3; 2; -1)$ appartient-il à D ?

2) Soit Δ la droite définie par :
$$\begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R})$$
 Donner un système d'équations cartésiennes de la

droite Δ .

3) Déterminer $D \cap \Delta$

Exercice 7 : On considère les plans P et P' d'équations respectives : $2x + y - 2z - 3 = 0$ et $x + y + 3z - 2 = 0$.

1) Montrer que P et P' sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (D) .

2) Etudier d'intersection de (D) avec le plan P'' d'équation : $x + y - z - 6 = 0$.

3) Retrouver, par le calcul direct, l'intersection des trois plans P, P' et P'' .

Exercice 8 : Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les droites D et D'

définies par : $D \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R})$ et $D' \begin{cases} x - 3z - 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

1) Montrer que les droites D et D' sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection A .

2) Donner une équation cartésienne du plan P contenant D et D' .

3) Soit Q le plan d'équation cartésienne : $2x - y - 5 = 0$.

a) Montrer que les plans P et Q sont sécants suivant une droite Δ dont on donnera un point et un vecteur

b) Montrer que les droites D et Δ sont strictement parallèles.

Exercice 9: L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On donne les points $A(-1; 1; -1)$; $B(0; 2; 2)$; $C(1; 1; 1)$ et $D(2; 4; -4)$

- 1) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $H(1; 2; 0)$ et orthogonal à (AH)
- 2) Vérifier que les points B, C et D appartiennent à P.

Exercice 10 : L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Soit P le plan d'équation :

$$2x - 2y + x - 3 = 0 \text{ et A le point de coordonnées } (1; 1; 2).$$

- 1) Déterminer la distance d du point A au plan P.
- 2) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur P. Vérifier que $AH = d$.

Exercice 11 Dans l'espace ξ , rapporté à un repère cartésien $R = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points :

$$A(1; 1; 1) ; B(2; 0; -1) ; C(-1; 2; -1) \text{ et } E(2; -1; 3).$$

- 1) a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- b) Déterminer une équation cartésienne du Plan P contenant A, B et C.
- c) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont-ils coplanaires ?

$$2) \text{ Soit } \Delta \text{ l'ensemble des points } M(x; y; z) \text{ de } \xi \text{ tels que : } \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

- a) Vérifier que l'ensemble Δ est une droite de ξ dont on précisera un point et un vecteur directeur.
- b) Vérifier que E appartient à la droite Δ .
- c) Etudier la position relative de Δ et (AB) d) En déduire l'intersection de Δ et P.

Exercice 12: L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(6, 0, 0)$; $B(0, 6, 0)$; $C(0, 0, 6)$ et $D(-2, -2, -2)$.

- 1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- b) On note P le plan (ABC). Déterminer une équation cartésienne du plan P.
- c) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
- 2) a) Vérifier que la droite (OD) est perpendiculaire au plan P.
- b) Donner une représentation paramétrique de la droite (OD).
- c) Soit H le projeté orthogonal de O sur P. Déterminer les coordonnées de H et montrer que H est équidistant des points A, B et C.
- d) En déduire que (OD) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.
- 3) Soit Q le plan médiateur du segment [CD]. a) Donner une équation cartésienne de Q.
- b) Montrer que P et Q sont sécants et déterminer leur intersection.

Exercice 13: Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ un repère orthonormal de l'espace.

- 1) Soit G l'isobarycentre des points A, B et C.
- a) Donner les coordonnées du point G. b) Montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC). c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
- 2) On considère les points $A'(2; 0; 0)$, $B'(0; 2; 0)$ et $C'(0; 0; 3)$.
- a) Donner une représentation paramétrique de la droite $(A'C')$.
- b) Calculer les coordonnées du point K commun de la droite $(A'C')$ et du plan (ABC).
- c) Donner une représentation paramétrique de la droite $(B'C')$.

- d) Calculer les coordonnées du point L commun à la droite $(B'C')$ et au plan (ABC) .
 e) Caractériser alors l'intersection des plans (ABC) et $(A'B'C')$.

Exercice 14 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points

$A(-1; 2; 1)$; $B(1; -6; -1)$ et $C(2; 2; 2)$.

- 1) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points A ; B et C.
 2) Soit Q le plan d'équation : $x + y - 3z + 2 = 0$ et Q' le plan de repère $(O; \vec{i}; \vec{k})$.
 a) Montrer que les plans Q et Q' sont sécantes.
 b) Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection Δ des plans Q et Q'.

Exercice 15 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points

$A(2, 1, -1)$; $B(0, 2, 1)$ et $C(1, 2, -1)$.

- 1) a) Montrer que A, B et C déterminent un plan.
 b) Montrer qu'une équation cartésienne de (ABC) est : $2x + 2y + z - 5 = 0$

2) Soit la droite Δ :
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 - t \\ z = -4 - \frac{1}{2}t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

- a) Montrer que Δ est perpendiculaire au plan (ABC) puis calculer les coordonnées de leur point d'intersection E.
 b) Vérifier que ABCE est un parallélogramme
 3) a) Vérifier que le point K $(-1; -3; -5)$ est un point de Δ . b) Calculer $d(B; \Delta)$

Exercice 16 : Soit ABCDEFGH un cube de l'espace tel que $AB = 1$

On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

- 1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG)
 2) a) Montrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (EBD)
 b) En déduire une équation cartésienne du plan (EBD)
 c) Déterminer les coordonnées du point L intersection du plan (EBD) et la droite (AG)

Exercice 17 L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne $A(1, 0, 1)$, $B(1, 3, -2)$, $C(3, 1, 0)$ et $D(2, 2, 0)$.

- 1) a) Montrer que A , B et C ne sont pas alignés.
 b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $y + z - 1 = 0$.
 c) En déduire que A, B, C et D ne sont pas colinéaires.
 d) Ecrire une équation du plan P qui passe par le point D et parallèle au plan (ABC) .

2) Soit les plans P_1 et P_2 tels que : $P_1 : 2y - 2z + 1 = 0$ et $P_2 : \begin{cases} x = 2 + \alpha + 2\beta \\ y = 1 - \alpha - \beta \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}; \beta \in \mathbb{R}$

- Montrer qu'une équation cartésienne du plan P_2 est $x + 2y - z - 3 = 0$.
- Montrer que P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ .
- Donner une représentation paramétrique de la droite Δ .
- Montrer que la droite Δ coupe le plan (ABC) en un point I dont on précisera les coordonnées.

Exercice 18 : Dans un repère orthonormal, soient $A(-1; -1; 0)$, $B(2; 0; 4)$ et $C(0; 3; 5)$.

- Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ différent du vecteur nul, à la fois orthogonal au vecteur $\vec{AB}$ et au vecteur $\vec{AC}$.
- Etablir une équation du plan $P = (ABC)$.
- Parmi les points suivants, indiquer ceux qui appartiennent au même demi-espace ouvert de frontière P que l'origine : $K(3; 2; 4)$, $N(-5; -1; 0)$ et $Q(2; 5; 9)$.
- Calculer la distance de l'origine au plan P .

Exercice 19 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les plans (P)

et (P') d'équations $(P) : 2x - y + 2z - 5 = 0$; $(P') : 2x + 2y - z - 4 = 0$

- Montrer que $(P) \perp (P')$
- Calculer la distance du point $A(1; 2; -1)$ à chacun des plans (P) et (P') . En déduire la distance du point A à la droite (D) d'intersection de (P) et (P')
- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (D) .
 - Déterminer par ses coordonnées, le point M de la droite (D) pour lequel la distance AM est minimale.

Exercice 20 : L'espace ξ est rapporté à un repère cartésien $R = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. A tout réel m ; on associe

l'ensemble P_m des points $M(x; y; z)$ de ξ tels que : $(m-1)x + my + (2-m)z + 3m - 1 = 0$.

- Vérifier que, pour tout réel m , P_m est un plan.

2) Soit D la droite définie par : $\begin{cases} x = -3 + 2\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R})$

- Déterminer m pour que D et parallèle à P_m ;
- D est-elle contenue dans un plan P_m ?

- montrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe Δ dont on donnera une représentation paramétrique.

- Soit $\mathcal{D}'$ la droite passant par $A(0; -2; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

- Déterminer $\mathcal{D}' \cap P_m$;
- Montrer que, pour tout réel m , $\mathcal{D}'$ et P_m sont sécants et préciser $\mathcal{D}' \cap P_m$

Exercice 21 : Dans la figure ci-contre $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé, $ABCS$ est un tétraèdre tel que :

$B(0; 4; 0)$; $C(2; 0; 0)$ et $S(0; 1; 4)$