

EXERCICES

Exercice 1 :

1°/ Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturels n , le reste de la division euclidienne par 9 de 4^n

2°/ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 22^{9n+2} - 31^{3n+1} \text{ est divisible par } 9$$

Exercice 2 :

1°/ Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes dans la division par 7 des entiers naturels suivant 2^n et 3^n

2°/ Déterminer l'ensemble des entiers naturels n vérifiant : $2^n + 3^n \equiv 0 \pmod{7}$

Exercice 3 :

1°/ x et y étant deux entiers relatifs déterminer tous les restes possibles de la division euclidienne par 4 du nombre $x^2 - 3y^2$

2°/ Existe-t-il trois entiers relatifs x, y, z tel que $x^2 - 3y^2 + 4z = 3$

Exercice 4 :

Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} : n(2n+1)(7n+1) \text{ est divisible par } 6$$

Exercice 5 :

Soit n un entier naturel

On pose $a = 2n + 8$, $b = 3n + 15$

Soit $\delta = \text{le P.G.C.D de } a \text{ et } b$

1°/ Montrer que δ divise 6

2°/ Déterminer l'ensemble des entiers n tels que :

$$\text{PGCD}(2n+8, 3n+15) = 6$$

Exercice 6 :

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$

$$\text{PGCD}((5n^3 - n), n + 2) = \text{PGCD}(n + 2, 38)$$

2°/ Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que :

$$(n + 2) \text{ divise } (5n^3 - n)$$

3°/ Déterminer les valeurs possibles du PGCD de $5n^3 - n$ et $n + 2$?

4°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$5n^3 - n \wedge n + 2 = 19$$

Exercice 7 :

1°/ Quels sont les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 40425

2°/ Soit x et y deux entiers naturels non nuls .

On note $d = \text{PGCD}(x, y)$

$$m = \text{PPCM}(x, y)$$

Déterminer x et y sachant que $m^2 - 3d^2 = 40425$

Exercice 8 :

1°/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x - 11y = 4$

2°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système
$$\begin{cases} 3u \equiv 1 \pmod{5} \\ 7u \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$$

Exercice 9 :

1°/

Soit $\mathbb{Z}$ l'équation : $7x - 3y = 1$

a) Montrer que (E) possède des solutions.

b) Résoudre (E).

c) Montrer que si le couple (x, y) est solution de (1) alors x et y sont premiers entre eux .

2°/ Soit a et b deux entiers relatifs vérifiant la relation (E) : $7a - 3b = 29$

a) On désigne par D : le plus grand commun diviseur de a et b

Monter que les seules valeurs possibles de D sont 1 et 29

b) Résoudre :
$$\begin{cases} 7a - 3b = 29 \\ D = 29 \end{cases}$$

c) Soit M le petit commun multiple de a et b

Résoudre :
$$\begin{cases} 7a - 3b = 29 \\ D = 29 \\ M = 1044 \end{cases}$$

3°/ Résoudre :
$$\begin{cases} 7a - 3b = 29 \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$

Exercice 10 :

$(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec $x \leq y$

on pose $d = x \wedge y$

$m = x \vee y$

on suppose que : $m + 10d = 142$ (*)

1°/ Montrer que les seules valeurs possibles de d sont 1 ou 2

2°/ Trouver les couples (x, y) vérifiant (*)

Exercice 11 :

1°/ Trouver l'ensemble des entiers naturels qui divisent 276

2°/ Trouver les paires d'entiers naturels dont le plus grand diviseur commun d et le plus petit multiple commun m vérifient :

$$\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$$

Exercice 12 :1°/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E) : 5x - 3y = 2$$

2°/ Résoudre

$$(S) : \begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ x \wedge y = 2 \end{cases}$$

Exercice 13 :

$$U_n = n^4 + n^2 + 1 \quad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

1°/ Montrer que U_n est produit de deux facteurs de second degré

2°/ Montrer que ces deux facteurs sont premiers entre eux

3°/ U_n peut-il être premier ?**Exercice 14 :**

Démontrer que :

$$1^\circ/\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{10n+3} + 3^{5n+3} - 2 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$2^\circ/\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad n^7 - n \equiv 0 \pmod{42}.$$

Exercice 15 :

1°/ Énoncer le petit théorème de Fermat

2°/ Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que : $(n+1)^{17} \equiv 2 \pmod{17}$

$$3^\circ/\text{Résoudre le système } \begin{cases} (n+1)^{17} \equiv 2 \pmod{17} \\ (n+3)^{13} \equiv 5 \pmod{13} \end{cases}$$

Exercice 16 :On considère deux entiers naturels non nuls a et b tels que : $a + b = 23$ 1°/ Montrer que a et b sont premiers entre eux2°/ En déduire a et b sachant que $a < b$ et PPCM(a, b) = 126

3°/

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $9U - 14V = 1$ b) (S) : $\begin{cases} x \equiv 4(9) \\ x \equiv 5(14) \end{cases}$ Résoudre (S)**Exercice 17 :**1°/ Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation en (u, v)

$$7u - 9v = 3$$

2°/ Un entier A , divisé par 7 donne pour reste 2 ce même nombre divisé par 9 donne pour reste 5

a) Quel reste donne-t-il si on le divise par 63

b) Trouver A sachant ; $1920 < A < 2030$ c) Trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que : $A^n = 1$ (9)**Exercice 18 :**

$$n \in \mathbb{N}^* ; A = 3n + 1 ; B = 5n - 1$$

1°/ Montrer que $A \wedge B$ est un diviseur de 82°/ Déterminer l'ensemble des entiers n tel que : $A \wedge B = 8$ **Exercice 19 :** n un entier naturel ≥ 2 on considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_n) : x - ny = 2$ 1°/ Résoudre (E_n) 2°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les systèmes

a)
$$\begin{cases} x - ny = 2 \\ PGCD(x, y) = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - ny = 2 \\ x \equiv y + 1(n) \end{cases}$$

Exercice 20 :

Soit $x \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_n = x^n - 1$

1°/ Montrer que :

a) $\text{PGCD}(U_n, U_{n+1}) = x - 1$

b) Trouver x tel que U_n et U_{n+1} soient premiers entre eux .

2°/ Montrer que si d est un diviseur positif de n alors U_d est un diviseur de U_n .

3°/ Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $\delta = \text{PGCD}(n, m)$

a) Montrer qu'il existe p et q entiers vérifiant : $\delta = mp - nq$

b) En déduire que : $U_\delta = U_{mp} - U_{nq} (U_\delta + 1)$

c) Montrer que : $U_{nq} \wedge U_{mq} = U_\delta$

d) Montrer que : $U_n \wedge U_m = U_\delta$

SOLUTIONS

Solution 1 :

$$1^{\circ} / 4^0 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$4^1 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$4^2 \equiv 7 \pmod{9}$$

$$4^3 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$\text{d'où } 4^{3p} \equiv 1 \pmod{9}$$

$$4^{3p+1} \equiv 4 \pmod{9}$$

$$4^{3p+2} \equiv 7 \pmod{9}$$

les restes possibles de la division euclidienne par 9 de 4^n sont 1, 4, 7.

$$2^{\circ} / \text{on a : } 22 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$31 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$\text{d'où : } 22^{9n+2} - 31^{3n-1} \equiv 4^{9n+2} - 4^{3n-1} \pmod{9} \equiv 4^{3(3n)+2} - 4^{3(n-1)+2} \pmod{9}$$

$$\equiv 7 - 7 \pmod{9} \equiv 0 \pmod{9}$$

conclusion : pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^* : 22^{9n+2} - 31^{3n-1} \equiv 0 \pmod{9}$

Solution 2 :

1^o /

$$\bullet 2^0 \equiv 1 \pmod{7} ; 2^1 \equiv 2 \pmod{7}$$

D'où $\forall p \in \mathbb{N}$ on a :

$$2^{3p} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$2^{3p+1} \equiv 2 \pmod{7}$$

$$2^{3p+2} \equiv 4 \pmod{7}$$

Les restes possibles dans la division par 7 de 2^n sont 1, 2, 4

$$\bullet 3^0 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$3^3 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$3^1 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$3^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$3^2 \equiv 2 \pmod{7}$$

On a :

$$3^{6p} \equiv 1 \pmod{7} ; 3^{6p+1} \equiv 3 \pmod{7} ; 3^{6p+2} \equiv 2 \pmod{7}$$

$$3^{6p+3} \equiv 6 \pmod{7} ; 3^{6p+4} \equiv 4 \pmod{7} ; 3^{6p+5} \equiv 5 \pmod{7}$$

Les restes possibles dans la division par 7 de 3^n sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$2^\circ / \text{ Si } n = 6p \Rightarrow 2n + 3n \equiv 26p + 36p$$

$$\equiv (2^{3p})^2 + 3^{6p} \pmod{7} \equiv 1 + 1 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}$$

$$\text{Si } n = 6p + 1 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 2 + 3 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$\text{Si } n = 6p + 2 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 4 + 2 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$\text{Si } n = 6p + 3 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 1 + 6 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\text{Si } n = 6p + 4 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 4 + 4 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\text{Si } n = 6p + 5 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 4 + 5 \equiv 2 \pmod{7}$$

Conclusion : $2^n + 3^n \equiv 0 \pmod{7}$ ssi $n = 6p + 3$ où $p \in \mathbb{N}$

Solution 3 :

$$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{4} \text{ ou } x \equiv 1 \pmod{4} \text{ ou } x \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\text{ou } x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{4} \text{ ou } x^2 \equiv 1 \pmod{4} \text{ ou } x^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\text{ou } x^2 \equiv 9 \pmod{4} \equiv 1 \pmod{4}$$

d'où : pour tout $x \in \mathbb{Z}$ $x^2 \equiv 0$ ou $1 \pmod{4}$

$$x^2 - 3y^2 \equiv x^2 + y^2 \pmod{4}$$

$x^2 \backslash y^2$	0	1
0	0	1
1	1	2

→ $(x^2 + y^2)$

d'où les restes possibles de $x^2 - 3y^2$ sont 0 ou 1 ou 2 .

1°/ Supposons qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\text{tels que : } x^2 - 3y^2 + 4z = 3 \Rightarrow x^2 - 3y^2 + 4z \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3y^2 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow 3 \text{ est le}$$

reste de la division euclidienne de $x^2 - 3y^2$ par 4.

ce qui est impossible d'après 1°/

Solution 4 :

*

- $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{2} \text{ ou } n \equiv 1 \pmod{2}$
- $n \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow \begin{cases} 2n+1 \equiv 1 \pmod{2} \\ 7n+1 \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod{2}$
- $n \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow 7n+1 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod{2}$

conclusion : pour $\forall n \in \mathbb{N} : n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod{2}$

*

- $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ou } n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ou } n \equiv 2 \pmod{3}$
- $n \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod{3}$
- $n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2n+1 \equiv 0 \pmod{3}$
d'où $n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod{3}$
- $n \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 7n+1 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod{3}$

on a : Pour $\forall n \in \mathbb{N} : n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod{3}$

ainsi on peut écrire : $\begin{cases} n(2n+1)(7n+1) \in M_2 \\ n(2n+1)(7n+1) \in M_3 \end{cases}$

$$M_2 \cap M_3 = M_{(2 \vee 3)} = M_6$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod{6}$

Solution 5 :

$$1^\circ / \delta = \text{P.G.C.D.}(a, b) \Rightarrow \delta \text{ divise } a = 2n+8 \text{ et } b = 3n+5$$

$$\Rightarrow \delta \text{ divise } 2b - 3a \text{ c.a.d. } \delta \text{ divise } 6$$

$$2^\circ / \text{PGCD}(2n+8, 3n+15) = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2n+8 = 6p \\ 3n+15 = 6q \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3p - 4 \\ n = 2q - 5 \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$$

$$3p - 4 = 2q - 5 \Leftrightarrow 3p - 2q = -1$$

$$\Leftrightarrow 2q - 3p = 1 \quad (\text{D'après Bézout : } p \wedge q = 1)$$

$$2q - 3p = 2 \times 2 - 3 \times 1$$

$$2(q - 2) = 3(p - 1)$$

$$3 \text{ divise } 2(q - 2) \text{ or } 3 \wedge 2 = 1$$

d'après le lemme Gauss : 3 divise $q - 2$ &

$$\text{d'où : } q - 2 = 3k \text{ où } k \in \mathbb{N}^* \quad \text{d'où } n = 2(3k + 2) - 5 = 6k - 1$$

$$S = \{ 6k - 1 \text{ où } k \in \mathbb{N}^* \}$$

Solution 6 :

1°/ On a : Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$5n^3 - n = (n + 2)(5n^2 - 10n + 19) - 38$$

$$\Rightarrow \text{PGCD}(5n^3 - n, n + 2) = \text{PGCD}(n + 2, 38) \quad (\text{d'après l'algorithme d'Euclide})$$

2°/ $n + 2$ divise $5n^3 - n$ signifie

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(5n^3 - n, n + 2) = n + 2 &\Leftrightarrow \text{PGCD}(n + 2, 38) = n + 2 \\ &\Leftrightarrow n + 2 \text{ divise } 38 \end{aligned}$$

$$\text{or } D_{38} = \{ 1, 2, 19, 38 \}$$

$$\text{d'où } n \in \{ -1, 0, 17, 36 \}$$

$$3°/ \text{PGCD}(5n^3 - n, n + 2) = \text{PGCD}(n + 2, 38) = d$$

donc d est un diviseur de 38

$$\text{d'où } d = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 19 \text{ ou } 38$$

$$4°/ (5n^3 - n) \wedge (n + 2) = 19 \Leftrightarrow (n + 2) \wedge 38 = 19$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n + 2 = 19p \\ 38 = 19p \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + 2 = 19p \\ q = 2 \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + 2 = 19p \\ p \text{ entre relatif impair} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow n + 2 = 19(2k + 1) \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } n = 38k + 17$$

$$S = \{ 38k + 17 ; k \in \mathbb{Z} \}$$

Solution 7 :

$$1^\circ / \text{On a : } 40425 = 5^2 \times 7^2 \times 33$$

L'ensemble des entiers dont le carré est un diviseur de 40425 est

$$\{1, 5, 7, 35\}$$

$$2^\circ / \text{on a : } m = \alpha d \quad (\alpha \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{d'où } m^2 - 3d^2 = 40425 \Leftrightarrow (\alpha^2 - 3)d^2 = 40425$$

$$\Rightarrow d^2 \text{ est un diviseur de } 40425$$

$$\Rightarrow d \in \{1, 5, 7, 35\}$$

$$\text{si } d = 1 \Rightarrow m^2 = 40428 \text{ ce qui est impossible car } m \notin \mathbb{N}^*$$

$$\text{si } d = 5 \Rightarrow m^2 = 40500 \Rightarrow m \notin \mathbb{N}^*$$

$$\text{si } d = 7 \Rightarrow m^2 = 40572 \Rightarrow m \notin \mathbb{N}^*$$

$$\text{si } d = 35 \Rightarrow m^2 = 44100 = 441 \times 100 = (210)^2$$

$$\text{d'où } m = 210$$

$$\text{on a : } \begin{cases} d = 35 \\ m = 210 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x = dx' \\ y = dy' \end{cases} \text{ avec } x' \wedge y' = 1$$

$$\text{de plus } md = xy \Rightarrow m = d x' y'$$

$$x' y' = \frac{210}{35} = 6$$

$$\begin{cases} x' y' = 6 \\ x' \wedge y' = 1 \end{cases} \Rightarrow (x', y') \in \{(1, 6); (2, 3); (3, 2); (6, 1)\}$$

$$\text{d'où } (x, y) \in \{(35, 210); (70, 105); (105, 70); (210, 35)\}$$

Solution 8 :

$$1^\circ / \text{On a : } 5 \times 3 - 11 \times 1 = 4$$

$$5x - 11y = 4 \Leftrightarrow 5x - 11y = 5 \times 3 - 11 \times 1$$

$$\Leftrightarrow 5(x-3) = 11(y-1) \Rightarrow 11 \text{ divise } 5(x-3)$$

$$\text{or } 11 \wedge 5 = 1$$

d'après lemme de Gauss on a : 11 divise $(x-3)$

d'où il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x-3 = 11k$ d'où $x = 11k+3$

$$2^\circ / \begin{cases} 3u \equiv 1(5) \\ 7u \equiv 9(11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times 3u \equiv 2(\text{mod } 5) \\ 7 \times 8u \equiv 72(\text{mod } 11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \equiv 2(\text{mod } 5) \\ 4 \equiv 6(\text{mod } 11) \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(11k+3, 5k+1) \text{ ou } k \in \mathbb{Z}\}$$

(2 est un inverse de 3 modulo 5 et 8 est inverse de 7 modulo 11)

$$\text{Il existe } (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \begin{cases} U-2=5x \\ U-6=11y \end{cases}$$

$$\text{ainsi } 5x+2=U=11y+6$$

$$\text{d'où } 5x+2=11y+6 \Leftrightarrow 5x-11y=4$$

$$\text{d'après 1) } x=3+11k$$

$$y=1+5k \text{ ou } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } U=5(3+11k)+2=17+55k$$

$$S = \{17+55k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Solution 9 :

$$1^\circ / \text{a) } 7 \wedge 3 = 1$$

d'après l'identité de Bézout il existe au moins un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2 /$

$$7x_0 - 3y_0 = 1$$

$$\text{b) } 7x - 3y = 7 \times 1 - 3 \times 2 \Leftrightarrow 7(x-1) = 3(y-2) \Leftrightarrow 3 \text{ divise}$$

$$7(x-1) \text{ or } 7 \wedge 3 = 1$$

donc d'après le lemme de Gauss 3 divise $(x-1)$

et par suite $x-1 = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$) d'où $x = 3k+1$

$$\text{D'où : } 7(3k) = 3(y-2) \Rightarrow y = 7k + 2$$

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (3k + 1, 7k + 2) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{c) } (x, y) \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow 7x - 3y = 1$$

donc d'après l'identité de Bezout $x \wedge y = 1$

2°/ a) $D = \text{pgcd}(a, b)$ donc D divise a et D divise b *et par suite D divise $7a - 3b$, en d'autre termes D divise 29

$$\text{D'où } D = 1 \text{ ou } D = 29$$

$$\text{b) } \begin{cases} 7a - 3b = 29 & (1) \\ a \wedge b = 29 & (2) \end{cases}$$

$$(2) : \begin{cases} a = 29a' \\ b = 29b' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$$

(1) s'écrit : $7a' - 3b' = 1$ d'où d'après la question 1)

$$\begin{cases} a' = 1 + 3k \\ b' = 2 + 7k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } a = 29(1 + 3k) = 29 + 87k$$

$$b = 29(1 + 7k) = 29 + 203k$$

$$S = \{ (29 + 87k, 29 + 203k), k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{c) on a : } MD = ab = 29^2 a' b' \Rightarrow a' b' = \frac{1044}{29} = 36$$

$$\text{on a aussi : } \begin{cases} 7a' - 3b' = 1 \\ a' b' = 36 \end{cases} \Rightarrow b'(1 + 3b') = 252$$

$$\text{d'où } 3b'^2 + b' - 252 = 0$$

$$\text{donc } b' = \frac{-52}{6} \notin \mathbb{Z} \text{ ou } b' = 9 \text{ donc } a' = 4$$

$$\begin{cases} a = 29a' = 116 \\ b = 29b' = 261 \end{cases} \quad S = \{(116, 261)\}$$

$$3^\circ / \begin{cases} 7a - 3b = 29 & (*) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$

$(2, -5)$ est une solution de $(*)$

$$7a - 3b = 29 \Leftrightarrow 7(a - 2) = 3(b + 5)$$

$$7 \wedge 3 = 1$$

$$\text{d'où } \begin{cases} a = 2 + 3k \\ b = -5 + 7k \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{or } a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (2 + 3k) \wedge (7k - 5) = 1$$

$$\Leftrightarrow (k - 9) \wedge 29 = 1 \quad (\text{ceci d'après l'algorithme d'Ecluse})$$

$$\Leftrightarrow k - 9 \not\equiv 0 \pmod{29}$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{(3k + 2, 7k - 5) \text{ où } k \not\equiv 9 \pmod{29} \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$$

Solution 10 :

1°/ On sait que $m = \alpha d$ (car d divise m) où $\alpha \in \mathbb{N}$

$$m \nmid 10d = 142 \Rightarrow d(\alpha + 10) = 142$$

d'où d est un diviseur de 142

$$\text{or } 142 = 2 \times 71$$

d'où $d = 1$ ou 2 ou 71 ou 142 .

- Si $d = 1$ alors $m = 132$
- Si $d = 2$ alors $m = 122$
- Si $d = 71 \Rightarrow m < 0$ impossible
- Si $d = 142 \Rightarrow m < 0$

Les valeurs possibles de d sont 1 ou 2

$$2^\circ / \text{ Si } d = 1 \Rightarrow m = 132$$

$$\text{or } md = ab \Rightarrow ab = 132 \text{ avec } a \wedge b = 1$$

$$\text{d'où } (a,b) \in \left\{ \begin{array}{l} (1,132); (3,44); (4,33); (11,12) \\ (132,1); (44,3); (33,4); (12,11) \end{array} \right\}$$

$$\text{si } d = 2 \Rightarrow m = 122$$

$$\text{or } md = ab \Rightarrow 244 = ab$$

$$\text{or } \begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$$

$$\text{on a : } ab = 244 \Rightarrow d^2 a' b' = 244 \quad a' b' = 61$$

$$\Rightarrow (a', b') = (1, 61) ; \text{ ou } (61, 1)$$

$$\text{et par suite : } (a, b) = (2, 132) \text{ ou } (132, 2)$$

Conclusion : Les couples solutions de (*) sont :

$$(1, 132) ; (3, 44) ; (4, 33) ; (11, 12) ; (132, 1) ; (44, 3) ; (33, 4) ; (12, 11) ; (132, 2) ; (2, 132)$$

Solution 11 :

$$1^\circ / \text{On a : } 276 = 2^2 \times 3 \times 23$$

Le nombre de diviseurs de 276 est 12

La liste des diviseurs positifs de 276 est $\{ 1, 2, 3, 4, 6, 12, 23, 46, 69, 92, 138, 276 \}$

$$2^\circ / \text{On a : } m = \alpha d$$

$$m + 3d = 276 \Rightarrow d(\alpha + 3) = 276$$

d'où : d est un diviseur de 276

$$\text{or } 10 < d < 30$$

$$1^\circ \text{cas si } d = 12 \Rightarrow m = 276 - 36 = 240$$

$$\text{or } md = ab$$

$$\text{or } \begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases} \Rightarrow m = d a' b'$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} a'b' = 20 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases} \quad \text{et par suite } \{a'b'\} = \{1, 20\} \text{ ou } \{4, 5\}$$

$$\text{et par suite } \{a, b\} = \{12, 240\} \text{ ou } \{48, 60\}$$

$$\underline{2^{\text{e}} \text{ cas}} \quad d = 23 \Rightarrow m = 207 \text{ alors } \begin{cases} a'b' = 9 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$$

$$\{a', b'\} = \{1, 9\} \Rightarrow \{a, b\} = \{23, 207\}$$

Conclusion : Les paires solutions du problème posé sont : $\{12, 204\}$; $\{48, 60\}$; $\{23, 207\}$

Solution 12 :

$$1^{\circ} / \text{ On a : } 5 \times 1 - 3 \times 1 = 2$$

$$\text{d'où } 5x - 3y = 2 \Leftrightarrow 5x - 3y = 5 \times 1 - 3 \times 1 \Leftrightarrow 5(x - 1) = 3(y - 1)$$

$$\text{or } 3 \text{ divise } 5(x - 1) \text{ et } 3 \wedge 5 = 1$$

d'où d'après le lemme de Gauss 3 divise $x - 1$ et par suite il existe

$k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$x - 1 = 3k \quad \text{et par suite } x = 3k + 1$$

$$\text{l'équation s'écrit : } 5(3k) = 3(y - 1) \text{ d'où } y = 5k + 1$$

$$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(3k + 1, 5k + 1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$2^{\circ} / \begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ x \wedge y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = 5k + 1 \\ x \wedge y = 2 \end{cases}$$

$$x \wedge y = 2 \Leftrightarrow 3k + 1 \wedge 5k + 1 = 2$$

ou d'après l'algorithme d'Euclide on a :

$$(3k + 1) \wedge (5k + 1) = (3k + 1) \wedge 2k = k + 1 \wedge 2k = (k + 1) \wedge 2$$

$$x \wedge y = 2 \Leftrightarrow (k + 1) \wedge 2 = 2 \Leftrightarrow k + 1 \text{ est pair}$$

$$\Leftrightarrow k + 1 = 2p \Leftrightarrow k = 2p - 1 \quad \text{où } p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } x = 3(2p - 1) + 1 = 6p - 2$$

$$y = 5(2p - 1) + 1 = 10p - 4$$

$$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (6p - 2, 10p - 4) \text{ où } p \in \mathbb{Z} \}$$

Solution 13 :

$$\begin{aligned} 1^\circ / U_n &= n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 \\ &= (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

$$2^\circ / \text{ soit } d = (n^2 + n + 1) \wedge (n^2 - n + 1) = (n^2 - n + 1) \wedge 2n$$

$$\text{car : } (n^2 + n + 1) = (n^2 - n + 1) \times 1 + 2n$$

$$\text{si } n = 2p \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d &= (4p^2 - 2p + 1) \wedge 4p \\ &= (4p) \wedge (2p - 1) = (2p - 1) \wedge 2 = 1 \quad (\text{ ceci est d'après } \end{aligned}$$

l'algorithme d'Euclide)

$$\text{si } n = 2p + 1 \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d &= (2p + 1)^2 - (2p + 1) + 1 \wedge (2p + 1) = (4p^2 + 2p + 1) \wedge (2p + 1) \\ &= (2p + 1) \wedge 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{car : } 4p^2 + 2p + 1 = 2p(2p + 1) + 1$$

conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n^2 + n + 1$ et $n^2 - n + 1$ sont premiers entre eux

$$3^\circ / \text{ On a : } U_n = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) \quad \text{où } n^2 + n + 1 \geq 1.$$

$$U_n \text{ est premier} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - n + 1 = 1 \\ \text{et} \\ n^2 + n + 1 \text{ premier} \end{cases} \Leftrightarrow n = 1$$

$$\text{Pour } n = 1 \Rightarrow U_n = U_1 = 3 \text{ qui est premier}$$

Conclusion : U_n est premier ssi $n = 1$

Solution 14 :

1°/

$$\bullet 2^5 \equiv -1 \pmod{11} \text{ d'où } 2^{10n} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n+3} \equiv 8 \pmod{11}$$

$$\bullet 3^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3^{5n} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3^{5n+3} \equiv 5 \pmod{11}$$

$$\text{d'où : } 2^{10n+3} + 3^{5n+3} - 2 \equiv 0 \pmod{11}$$

2°/

• D'après le petit théorème de Fermat

$$n^7 \equiv n \pmod{7} \text{ car 7 est premier } \Rightarrow n^7 - n \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\bullet n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3 - 1)(n^3 + 1)$$

$$= n(n-1)(n+1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$$

$$\text{Si } n \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow n^7 - n \equiv 0 \pmod{2}$$

$$n \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow n^7 - n \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N} : n^7 - n \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\bullet \text{ si } n \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow n^7 - n \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{si } n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow n^7 - n \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\text{si } n \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow n^7 \equiv 2^7 \equiv 2 \equiv n \pmod{3}$$

$$\text{et par suite } n^7 - n \equiv 0 \pmod{3}$$

$$2 \text{ et } 3 \text{ sont premiers entre eux donc } (n^7 - n) \equiv 0 \pmod{6}$$

$$6 \text{ et } 7 \text{ sont premiers entre eux donc } n^7 - n \equiv 0 \pmod{42} \text{ car : } \begin{cases} n^7 - n \equiv 0 \pmod{6} \\ n^7 - n \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

Solution 15 :

1°/ Soit p un nombre premier :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : n^p \equiv n \pmod{p}$$

2°/ 17 est un nombre premier donc d'après le petit théorème de Fermat

$$(n+1)^{17} \equiv (n+1) \pmod{17}$$

$$\text{On a } (n+1)^{17} \equiv 2 \pmod{17} \Leftrightarrow (n+1) \equiv 2 \pmod{17} \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod{17}$$

$$\text{D'où } n = 17k + 1 \text{ où } k \in \mathbb{N}$$

$$3^\circ / \begin{cases} (n+1)^{17} \equiv 2 \pmod{17} & (1) \\ (n+3)^{13} \equiv 5 \pmod{13} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow n = 17k + 1 \quad \text{où } k \in \mathbb{N}$$

$$(2) \text{ s'écrit : } (17k+4)^{13} \equiv 5 \pmod{13} \Leftrightarrow (3k+4)^{13} \equiv 5 \pmod{13}$$

or d'après le petit théorème de Fermat : $(3k+4)^{13} \equiv 3k+4 \pmod{13}$ car 13 est premier

$$\text{on a ainsi : } 3k+4 \equiv 5 \pmod{13} \Leftrightarrow 3k \equiv 1 \pmod{13} \Leftrightarrow$$

$$4 \times 3k \equiv 4 \pmod{13} \Leftrightarrow -k \equiv 4 \pmod{13}$$

$$\Leftrightarrow k \equiv -4 \pmod{13}$$

$$\text{d'où } k \equiv 9 \pmod{13}$$

$$k = 13p + 9 \quad \text{où } p \in \mathbb{N}$$

$$\text{conclusion : } n = 17k + 1 \quad \text{où } k = 13p + 9$$

$$\text{d'où } n = 17(13p + 9) + 1$$

$$n = 221p + 154 \quad \text{où } p \in \mathbb{N}$$

Solution 16 :

$$1^\circ / a + b = 23 \quad (a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}^*)$$

soit $d = a \wedge b$ donc d divise a et d divise b

d'où d divise $(a + b)$ et par suite d divise 23

or $D_{23} = \{1, 23\}$ et par suite $d = 1$ ou 23

$$\text{or } \begin{cases} a \in \mathbb{N}^* \\ b \in \mathbb{N}^* \\ a + b = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a < 23 \\ 0 < b < 23 \end{cases}$$

$$\text{d'où } d \neq 23, \begin{pmatrix} d \leq a \\ d \leq b \end{pmatrix}$$

conclusion : a et b sont premiers entre eux

$$2^\circ / \text{PPCM}(a, b) = 126 = m$$

$$\text{on sait : } md = ab \quad \text{or } d = 1$$

$$\text{d'où } ab = 126$$

$$\text{on a : } \begin{cases} a+b=23 \\ ab=126 \end{cases} \quad \text{on a : } b=23-a$$

$$\text{d'où : } a(23-a)=126 \\ a^2 - 23a + 126 = 0$$

$$\Delta = (23)^2 - 4(126) = 529 - 504 = 25$$

$$\text{d'où } a = \frac{23-5}{2} = 9 \quad \text{on a : } a = \frac{23+5}{2} = 14$$

$$\text{si } a=9 \text{ alors } b=23-9=14$$

$$\text{si } a=14 \text{ alors } b=23-14=9 \text{ ce qui est impossible car } a < b$$

$$\text{conclusion : } a=9 \text{ et } b=14$$

3°/

$$\text{a) } 9u - 14V = 1$$

$(-3, -2)$ est une solution de cette équation

$$\text{on a : } 9U - 14V = 9(-3) - 14(-2)$$

$$9(U+3) = 14(V+2)$$

or $9 \wedge 14 = 1$ d'après Lemme de Gauss

14 divise $(U+3)$ et par suite il existe $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{tel que : } U+3 = 14k$$

$$U = 14k - 3$$

$$\text{d'autre part : } 9(U+3) = 14(V+2) \Rightarrow 9 \times 14k = 14(V+2)$$

$$\text{d'où : } V = 9k - 2$$

$$S = \{ 14k - 3, 9k - 2 \} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) (S) } \begin{cases} x \equiv 4(9) \\ x \equiv 5(14) \end{cases} \text{ il existe } (U, V) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que :}$$

$$x = 9U + 4 \text{ et } x = 14V + 5$$

$$\text{ainsi } 9U + 4 = 14V + 5 \quad \text{et par suite} \quad 9U - 14V = 1$$

$$\text{d'après 3°/ a) on a : } U = 14k - 3 \text{ et } V = 9k - 2 \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{et par suite } x = 9(14k - 3) + 4 = 126k - 23 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{ 126k - 23 \text{ où } k \in \mathbb{Z} \}$$

Solution 17 :

$$1^\circ / 7u + 9v = 3 \Leftrightarrow 7(u-3) = 9(v-2)$$

$$9 \text{ divise } 7(u-3) \text{ or } 9 \wedge 7 = 1$$

d'où d'après le lemme de Gauss 9 divise $(u-3)$

et par suite $u-3 = 9k$ où $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{donc } \underline{u = 3 + 9k}$$

$$\begin{cases} 9(v-2) = 7(u-3) \\ u = 3 + 9k \end{cases} \Rightarrow 9(v-2) = 7(9k)$$

$$\text{d'où } v = 2 + 7k$$

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (3 + 9k, 2 + 7k) \text{ où } k \in \mathbb{Z} \}$$

$$2^\circ / \begin{cases} A = 74 + 2 \\ A = 9v + 5 \end{cases} \text{ d'où } 7u + 2 = 9v + 5$$

$$7u - 9v = 3$$

or d'après $1^\circ / u = 3 + 9k$

$$v = 2 + 7k$$

$$A = 7(3+9k) + 2 = 21 + 63k + 2 = 63k + 23$$

Le reste de la division euclidienne de A par 63 est 23.

$$b^\circ / \text{on a : } \begin{cases} 1920 < A < 2030 \\ A = 63k + 23, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{d'où : } 1920 < 63k + 23 < 2030 \Rightarrow 1897 < 63k < 2007$$

$$\Rightarrow \frac{1897}{63} < k < \frac{2007}{63} \Rightarrow 30,11 < k < 31,86$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$ alors $k = 31$

$$\text{conclusion : } A = 63 \times 31 + 23 \quad A = 1976$$

$$c) A^n \equiv 1 \pmod{9} \Leftrightarrow 1976^n \equiv 1 \pmod{9}$$

on a : $1976 \equiv 5 \pmod{9}$

$$1976^2 \equiv 7 \pmod{9}$$

$$1976^3 \equiv -1 \pmod{9}$$

$$1976^6 \equiv 1 \pmod{9}$$

d'où : $(1976^6) \equiv 1 \pmod{9}$

d'où $n = 6p$ où $p \in \mathbb{N}$

Solution 18 :

1°/ On a : $d = A \wedge B$

$$\begin{cases} d \text{ divise } A \\ d \text{ divise } B \end{cases} \Rightarrow d \text{ divise } (5A - 3B)$$

$$\text{or } 5A - 3B = 5(3n+1) - 3(5n-1) = 8$$

d'où d divise 8

$$\begin{aligned} 2^\circ / A \wedge B &= (3n+1) \wedge (5n-1) = (3n+1) \wedge (2n-2) \\ &= (2n-2) \wedge (n+3) = (n+3) \wedge 8 \end{aligned}$$

$$(n+3) \wedge 8 = 8 \Leftrightarrow n+3 = 8k \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$n = 8k - 3$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{ 8k - 3 \text{ où } k \in \mathbb{N}^* \}$$

Solution 19 :

1°/ On remarque : $(x_0, y_0) = (2, 0)$ est une solution de (En)

$$(x - x_0) - n(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = ny$$

$$\begin{cases} x = 2 + nk \\ y = k \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (2 + nk, k); k \in \mathbb{Z} \}$$

$$2^\circ / * \begin{cases} x - ny = 2 \\ x \wedge y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + nk \\ y = k \\ x \wedge y = 2 \end{cases}$$

$$x \wedge y = 2 \Leftrightarrow (2 + nk) \wedge k = 2 \Leftrightarrow k \wedge 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow k = 2p \text{ où } p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} x = 2 + 2np \\ y = 2p \end{cases} \text{ où } p \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{ (2 + 2np, 2p) \}$$

$$* \begin{cases} x - ny = 2 \\ x \equiv y + 1 (n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + nk \\ y = k \\ x \equiv y + 1 (n) \end{cases}$$

$$\text{or } x \equiv y + 1 (n) \Leftrightarrow 2 + nk \equiv k + 1 (n) \Leftrightarrow k \equiv 1 (n)$$

$$\text{d'où } k = np + 1 \text{ où } p \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{ (2 + n^2p + n, np + 1) \text{ où } p \in \mathbb{Z} \}$$

Solution 20 :

$$1^\circ / a) U_n \wedge U_{n+1} = (x^n - 1, x^{n+1} - 1)$$

$$\text{or on a : } x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x + 1)$$

$$\text{d'où } U_n \wedge U_{n+1} = (x^n - 1) \wedge (x - 1) = x - 1$$

$$\text{car : } x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$\text{Conclusion : } U_n \wedge U_{n+1} = x - 1$$

$$b) U_n \text{ et } U_{n+1} \text{ sont premières entre eux ssi } x - 1 = 1$$

$$\text{d'où } x = 2$$

$$2^\circ / d \text{ est un diviseur de } n \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = kd$$

$$U_n = U_{kd} = x^{kd} - 1 = (x^d)^k - 1 = (x^d)^k - 1 = ((x^d)^{k-1} + (x^d)^{k-2} + \dots + x^d + 1)$$

$$\text{d'où } U_d \text{ est un diviseur de } U_n$$

$$3^\circ / \delta = n \wedge m$$

$$a) \text{ d'après l'identité de Bézout il existe } (p, q) \text{ tel que : } mp - nq = \delta$$

$$b) U_{mp} - U_{nq}(U_\delta + 1) = U_{mp} - U_{nq}(x^\delta)$$

$$\begin{aligned}
 &= x^{mp} - 1 - (x^{nq} - 1)x^{\delta} \\
 &= x^{mp} - 1 - x^{nq+\delta} + x^{\delta} = x^{\delta} - 1 = U_{\delta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \Delta &= U_{nq} \wedge U_{mp} \\
 &\Rightarrow \Delta \text{ divise } U_{nq} \text{ et } U_{mp} \\
 &\Rightarrow \Delta \text{ divise } U_{mp} - U_{nq}(U_{\delta} + 1) \\
 \text{d'où } \Delta &\text{ divise } U_{\delta}
 \end{aligned}$$

$$* \delta = n \wedge m \Rightarrow \delta \text{ divise } n \text{ et } \delta \text{ divise } m \Rightarrow \begin{cases} \delta \text{ divise } nq \\ \delta \text{ divise } mp \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_{\delta} \text{ divise } U_{nq} \\ U_{\delta} \text{ divise } U_{mp} \end{cases}$$

$$\text{d'où } U_{\delta} \text{ divise } U_{nq} \wedge U_{mp} = \Delta$$

$$\text{conclusion : } \begin{cases} U_{\delta} \text{ divise } \Delta \\ \Delta \text{ divise } U_{\delta} \end{cases} \Rightarrow \Delta = U_{\delta}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \delta = n \wedge m &\Rightarrow \begin{cases} \delta \text{ divise } n \\ \delta \text{ divise } m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{\delta} \text{ divise } U_n \\ U_{\delta} \text{ divise } U_m \end{cases} \\
 \text{donc } U_{\delta} &\text{ divise } (U_n \wedge U_m)
 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \gamma = \text{pgcd}(U_n, U_m) \Rightarrow \begin{cases} \gamma \text{ divise } U_n \\ \gamma \text{ divise } U_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \text{ divise } nq \\ n \text{ divise } mp \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_n \text{ divise } U_{nq} \\ U_n \text{ divise } U_{mp} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma \text{ divise } U_{nq} \\ \gamma \text{ divise } U_{mp} \end{cases} \Rightarrow \gamma \text{ divise } U_{nq} \wedge U_{mp}$$

$$\text{et par suite } \gamma \text{ divise } U_{\delta}$$

$$\text{conclusion : } U_n \wedge U_m = U_{\delta}$$