

Calcul dans IR et Calcul Vectoriel

Lycée Pilote Kebili

Série d'exercices

M^r Ammar Bouajila

Classe : 2^{ème} sciences

Série n°12

Exercice n°1 les questions sont indépendantes

1°a) Soit x un réel. Montrer que si $x^3 = 1$ alors $x = 1$.

b) Soient a et b sont deux réels positifs tels que $a^3 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $b^3 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

i) Montrer que $ab = 1$. ii) En déduire la valeur de $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$.

2° Soit x et y deux réels tel que $-1 \leq x \leq 3$ et $-3 \leq y \leq 5$. Encadrer $x^2 + y^2 + 4x + 6y$.

3° Soit x un réel strictement positif tel que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$.

Déterminer la valeur de $x + \frac{1}{x}$, En déduire la valeur de $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

4° Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Calculer alors $1 + 3 + 5 + \dots + 2023$.

c) Montrer que $1 + 3 + 5 + \dots + 2n + 1$ est un carré parfait.

5° Soit x et y deux réels tel que $x + y = 1$. Montrer que $xy \leq \frac{1}{4}$.

6° Soit x et y deux réels strictement positifs.

a) Montrer que $3 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$.

b) Montrer que $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$. En déduire que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{x+z}$.

c) Montrer que $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$.

d) Montrer que $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

e) Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \geq \frac{1}{xy}$.

7°a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}}$.

b) Calculer alors la somme $S = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.

Exercice n° 2

1°a) Résoudre dans $\mathbb{E}$ l'équation (E) : $\sqrt{x+3} + 1 = \sqrt{2-x}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{E}$ l'inéquation (I) : $\sqrt{3x^2-2x-1} \hat{A} 3x+1$.

2°a) Montrer que pour tout réel x , $(x-1)^2(4x+1) = 4x^3 - 7x^2 + 2x + 1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4x^3 + 1 \leq 7x^2 - 2x$.

c) Montrer que pour tout x de $[0,2]$, on a $x\sqrt{2-x} \leq \frac{x+1}{2}$.

3°a) Etudier le signe de (x^2+x) .

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2+x} \geq \frac{x}{2} + 1$.

Exercice n° 3

Dans La figure ci-dessous: ABCD est un parallélogramme de centre O. On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu de [AB]

1° Construire le point G et le point K tel que $\overrightarrow{CK} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

2° Soit H le point tel que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{DH}$

a) Montrer que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$. En déduire que H est le milieu du segment [DG]

b) En déduire que H est le centre de gravité de ADC

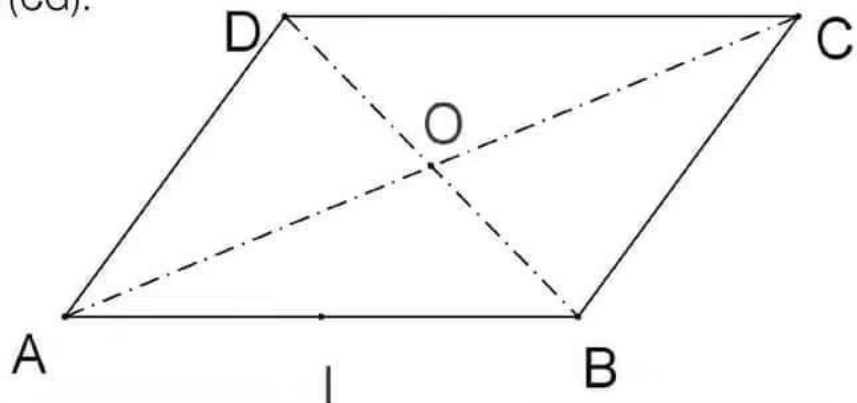
3°a) Montrer que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = 2\overrightarrow{HI}$ et que $\overrightarrow{CH} + 3\overrightarrow{DH} = 4\overrightarrow{KH}$

b) En déduire que les points I, H et K sont alignés

4° On considère le repère $R = (I; \overrightarrow{IO}; \overrightarrow{IB})$

a) Déterminer dans le repère R les coordonnées des points C, D et montrer que G a pour coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

b) Soit le point M(x, x-1) où x est un réel. Déterminer x pour que M appartienne à la droite (CG).



**Exercice 1 :**

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sqrt{32} + 3\sqrt{18} - 5\sqrt{72}$$

$$B = 4\sqrt{80} - 3\sqrt{20} - 2\sqrt{45}$$

$$C = \sqrt{48} - 8\sqrt{27} + 6\sqrt{75}$$

$$D = \sqrt{2} \times \sqrt{8} - 4\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$$

$$E = 3\sqrt{52} - 5\sqrt{108} + \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$$

$$F = (\sqrt{12} + \sqrt{27})^2 - (2\sqrt{48} - 5\sqrt{75})^2 - (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$$

2. Ecrire les nombres suivants sans radicaux au dénominateur :

$$A = \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$B = \frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$D = \frac{\sqrt{3} - 1}{4 - \frac{1}{\sqrt{3} + 1}}$$

Exercice 2 :Ecrire les nombres suivants de la forme $a + b\sqrt{c}$

$$\sqrt{7+2\sqrt{10}} ; \sqrt{21-4\sqrt{5}} ; \sqrt{32-20\sqrt{3}} ;$$

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}} ; \sqrt{34-24\sqrt{2}}$$

Exercice 3 :On considère les nombres $x = \sqrt{17+12\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{17-12\sqrt{2}}$

- Montrer que x est l'inverse de y .
- On pose $S = x + y$ et $P = x - y$
 - Calculer S^2 et P^2
 - En déduire S et P puis déterminer des expressions simples de x et y .

Exercice 4 :

1. Soit
- n
- un entier naturel non nul. Montrer que

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

2. Simplifier alors l'expression

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2017 \times 2018}$$

Exercice 5 :

1. Développer les expressions

$$A = (2x-3)^3 \text{ et } B = (4x+2y-5)^2$$

2. Factoriser les expressions

$$C = 4(x^2-1) + 5(x^2-2x+1) - (x-1)$$

$$D = (2x+1)^3 - (2x+1)(x^2+x+1)$$

Exercice 6 :Soit x un réel tel que $x \neq -1$ et $x \neq \frac{3}{2}$. On donne les expressions

$$A = 8x^3 - 27 + (3-2x)(3x^2+6x+10)$$

$$B = 4x^2 - 12x + 9 + (2x-3)(x^2+4)$$

1. Factoriser
- A
- et
- B

2. Montrer que
- $\frac{A}{B} = \frac{x-1}{x+1}$

Exercice 7 :

- I. On considère les réels

$$A = \sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{8+2\sqrt{15}} \text{ et } B = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

- Calculer A^2 et déduire une expression simple de A .
 - Prouver que $A + 2B$ est un entier.
2. Soit x un réel de l'intervalle $[1 ; 3]$
- Simplifier l'expression $E = x|x-1| + 5|x-3|$.
 - En déduire que $E \geq 6$.
- II. 1. Soit x un réel, factoriser l'expression $A = (x+1)^3 - x^3 - 1$.
2. En déduire la valeur de l'expression $S = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 98 \times 99 + 99 \times 100$

Mr : Ghoulam Rami
N : 21727522

Séries d'exercices N°1
Mathématiques

Classes 2^{ème} Sciences
G.R.Maths

Exercice 1 :

1 Simplifier $a = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ et $b = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.

Puis $X = b - a + 8\sqrt{6}$ et $Y = \frac{10\sqrt{3} + 4\sqrt{18}}{2\sqrt{3}}$.

2 Vérifier que X est l'inverse de Y et calculer $X^{2021} \times Y^{2022}$.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}$

1 a Montrer que $2^n = 2^{n+1} - 2^n$.

b En déduire $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{19} + 2^{20}$.

2 a Montrer que $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

b En déduire $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$.

Exercice 3 :

1 Ecrire plus simplement $X = \sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}}$ et

$Y = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2}$.

2 Comparer $\frac{1}{\sqrt{6} - 2}$ et $1 + \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$.

Exercice 4 :

Soit le réel $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

1 Montrer que $a^2 + a - 1 = 0$ et en déduire que $\frac{1}{a} = a + 1$.

2 Montrer que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{5}$.

Exercice 5 :

1 Développer $(8 - \sqrt{7})^2$.

2 Mettre le nombre $\sqrt{88 - 18\sqrt{7}}$ sous la forme $x - \sqrt{y}$.

3 Montrer que le nombre

$$a = \sqrt{88 - 18\sqrt{7}} - \sqrt{71 - 16\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{2}+2} - \frac{1}{\sqrt{2}-2} \text{ est un entier naturel.}$$

Exercice 6 :

Soient les réels $X = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ et $Y = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

1 Montrer que X et Y sont inverses.

2 On pose $A = X + Y$ et $B = X - Y$.

a Calculer A^2 et B^2 .

b Déduire une expression plus simple de X et Y .

c Calculer $X^3 - Y^3$.

Exercice 7 :

1 Développer $(1 - \sqrt{6})^2$ puis simplifier

$$E = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}(\sqrt{2} - 2)}.$$

2 Soit $x \in \mathbb{R}$, $A = 8x^3 - 27 + (3 - 2x)(3x^2 + 6x + 10)$ et

$$B = 4x^2 - 12x + 9 + (2x - 3)(x^2 + 4).$$

a Factoriser A et B .

b Lorsque $B \neq 0$, $\frac{A}{B}$.

3 Soient a et b deux réels tels que $\frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Montrer que

$$\frac{|a| + \sqrt{2}}{|b| + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4 Soit t un réel tel que $t > 2$.

a Montrer que $\frac{t-2}{t+2} < \frac{t^2-4}{t^2+4}$.

b En déduire que $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} < \frac{1}{9}$.

Exercice 8 :

1 Vérifier que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

2 En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{n}.$$



Chbedda
tel: 53080851

2^{ème} Année de l'Enseignement Secondaire

Calcul dans IR

Problèmes du premier et du second degré

➔ Exercice n°1 (5 points)

1- Soit $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ et $A = x - y$

a) Calculer A^2

b) Déduire la valeur exacte de A

2- Montrer que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

b- calculer la somme $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

➔ Exercice n°2 (4 points)

Résoudre dans IR

$$\frac{x^2 - 3x}{x - 3} = 0 \quad ; \quad \frac{x+2}{4x-2} \leq 1 \quad ; \quad \sqrt{4+x} < 2-x \quad ; \quad |x+2| \leq |3x+2|$$

⊙ Exercice N°1 : 7pts

1°) Résoudre dans IR les équations suivantes

a) $3x^2 + 4x - 4 = 0$

b) $x^2 - [2x + 1] = 0$

c) $x^2 \sqrt{2} - (3 + \sqrt{2})x + 3 = 0$

Ex ①:

$$\textcircled{1} \quad a = 3(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3(\sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2}) \\ = 3(3 + 2 + 2\sqrt{6}) = 3(5 + 2\sqrt{6}) \\ = 10 + 4\sqrt{6}$$

$$a = 10 + 4\sqrt{6}$$

$$b = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3(\sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2}) \\ = 3(5 - 2\sqrt{6}) = 15 - 6\sqrt{6}$$

$$b = 15 - 6\sqrt{6}$$

$$X = b - a + 8\sqrt{6} = 15 - 6\sqrt{6} - 10 - 4\sqrt{6} + 8\sqrt{6} \\ = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$X = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$Y = \frac{10\sqrt{3} + 4\sqrt{9}\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3} + 12\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ = \frac{2(5\sqrt{3} + 6\sqrt{2})}{2\sqrt{3}} = \frac{(5\sqrt{3} + 6\sqrt{2})\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} \\ = \frac{5\sqrt{3}^2 + 6\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ = \frac{15 + 6\sqrt{6}}{3} = \frac{15}{3} + \frac{6}{3}\sqrt{6} \\ = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$Y = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\textcircled{2} \quad X Y = (5 - 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6}) = 5^2 - (2\sqrt{6})^2 \\ = 25 - 24 = 1$$

$XY = 1$ alors X est l'inverse de Y .

①

$$X^{2024} \times Y^{2022} = X^{2021} Y^{2021} Y$$

$$= (XY)^{2021} Y = Y.$$

Exercise 2:

① ② $2^{n+1} - 2^n = 2^n \cdot 2 - 2^n \times 1$

$$= 2^n (2 - 1) = 2^n \times 1 = 2^n$$

Also $2^n = 2^{n+1} - 2^n$

⑥ $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{19} + 2^{20}$

$$= 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{19} + 2^{20}$$

$$= 1 + (2^2 - 2^1) + (2^3 - 2^2) + (2^4 - 2^3) + \dots + (2^{20} - 2^{19}) + (2^{21} - 2^{20})$$

$$= 1 - 2 + 2^{21} = 2^{21} - 1$$

② ② $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} - \frac{n+1}{n+2(n+1)}$

$$= \frac{n+2 - n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Also $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

⑤ $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$

$$= \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

②/

Exercise 5:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} (9 - \sqrt{7})^2 &= 9^2 - 2 \times 9\sqrt{7} + \sqrt{7}^2 \\ &= 81 + 7 - 18\sqrt{7} \\ &= 88 - 18\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \sqrt{88 - 18\sqrt{7}} &= \sqrt{(9 - \sqrt{7})^2} = |9 - \sqrt{7}| \\ &= 9 - \sqrt{7} \quad \text{car } 9 - \sqrt{7} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} (8 - \sqrt{7})^2 &= 8^2 + \sqrt{7}^2 - 2 \times 8\sqrt{7} \\ &= 64 + 7 - 16\sqrt{7} \\ &= 71 - 16\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \sqrt{71 - 16\sqrt{7}} = \sqrt{(8 - \sqrt{7})^2} = |8 - \sqrt{7}| = 8 - \sqrt{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}+2} - \frac{1}{\sqrt{2}-2} &= \frac{\sqrt{2}-2 - (\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}^2-2^2} = \frac{-4}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } a &= 9 - \sqrt{7} - (8 - \sqrt{7}) + 2 \\ &= 9 - \sqrt{7} - 8 + \sqrt{7} + 2 = 3 \\ a &= 3 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Exercise 6:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} XY &= \sqrt{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})} = \sqrt{9^2 - (4\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{81 - 16 \times 5} = \sqrt{81 - 80} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

$XY = 1$ Ainsi X et Y sont inverses.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \textcircled{a} A^2 &= X^2 + Y^2 + 2XY = 9 - 4\sqrt{5} + 9 + 4\sqrt{5} + 2 = 20 \\ B^2 &= X^2 + Y^2 - 2XY = 9 - 4\sqrt{5} + 9 + 4\sqrt{5} - 2 = 16 \end{aligned}$$

(5/)

$$\textcircled{b} \text{ on a: } A^2 = 20 \text{ et } A > 0$$

$$\text{Donc } A = \sqrt{20}$$

$$B^2 = 16 \text{ et } B < 0$$

$$\text{car } \sqrt{9-4\sqrt{5}} < \sqrt{9+4\sqrt{5}}$$

$$X < Y$$

$$B = X - Y < 0$$

$$\text{Donc } B = -\sqrt{16} = -4$$

$$\text{on a donc le système : } \begin{cases} X + Y = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} & L_1 \\ X - Y = -4 & L_2 \end{cases}$$

$$L_1 + L_2 \quad X + Y + X - Y = 2\sqrt{5} - 4$$

$$2X = 2(\sqrt{5} - 2)$$

$$\boxed{X = \sqrt{5} - 2}$$

$$L_1: \quad Y = 2\sqrt{5} - X$$

$$= 2\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2$$

$$= \sqrt{5} + 2$$

$$\text{Donc } X = \sqrt{5} - 2$$

$$Y = \sqrt{5} + 2$$

$$\textcircled{c} \quad X^3 - Y^3 = (X - Y)(X^2 + XY + Y^2)$$

$$= B (9 - 4\sqrt{5} + 9 + 4\sqrt{5} + 1)$$

$$= -4 \times 19 = -76.$$

⑥

Exercice 7:

$$① (1-\sqrt{6})^2 = 1 + \sqrt{6}^2 - 2\sqrt{6} = 7 - 2\sqrt{6}$$

$$E = \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \times 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{7 - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{(1-\sqrt{6})^2} = |1-\sqrt{6}| = -(1-\sqrt{6}) \quad \text{car } 1-\sqrt{6} < 0 \quad (1 < \sqrt{6})$$

$$E = \sqrt{6} - 1$$

$$② \text{ a) } A = (2x)^3 - 3^3 - (2x-3)(3x^2+6x+10)$$

$$= (2x-3)((2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2) - (2x-3)(3x^2+6x+10)$$

$$= (2x-3)(4x^2+6x+9) - (2x-3)(3x^2+6x+10)$$

$$= (2x-3)(4x^2+6x+9-3x^2-6x-10)$$

$$A = (2x-3)(x^2-1) = (2x-3)(x-1)(x+1)$$

$$B = \cancel{4x^2-2x-3} (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 + (2x-3)(x^2+4)$$

$$= (2x-3)^2 + (2x-3)(x^2+4)$$

$$= (2x-3)(2x-3+x^2+4)$$

$$= (2x-3)(x^2+2x+1)$$

$$B = (2x-3)(x+1)^2$$

$$\text{b) } \frac{A}{B} = \frac{(2x-3)(x-1)(x+1)}{(2x-3)(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$③ \quad \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{donc } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|b| = |a|\sqrt{2}$$

⑦

$$\text{donc } \frac{|a|+\sqrt{2}}{|a|+2} = \frac{|a|+\sqrt{2}}{|a|\sqrt{2}+2} = \frac{|a|+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(|a|+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{4} \quad a) \quad \frac{t-2}{t+2} = \frac{(t-2)(t+2)}{(t+2)(t+2)} = \frac{t^2-4}{t^2+4t+4}$$

$$t > 2 \Rightarrow t^2 > 2^2 = 4 \\ t^2 - 4 > 0$$

$$\text{donc pour comparer } \frac{t-2}{t+2} \text{ et } \frac{t^2-4}{t^2+1}$$

$$\text{on compare } t^2+1+4t \text{ et } t^2+1$$

$$\text{on a: } t^2+1+4t > t^2+1 \text{ car } 4t > 0$$

$$\text{donc } \frac{1}{t^2+1+4t} < \frac{1}{t^2+1}$$

$$\text{et comme } t^2-4 > 0 \text{ donc } \frac{t^2-4}{t^2+4t+4} < \frac{t^2-4}{t^2+1}$$

$$\frac{t-2}{t+2} < \frac{t^2-4}{t^2+1}$$

$$\textcircled{b} \text{ Pour } t = \sqrt{5} > 2$$

$$\frac{t-2}{t+2} < \frac{t^2-4}{t^2+1} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} < \frac{\sqrt{5}^2-4}{\sqrt{5}^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} < \frac{1}{9}$$

Exercice 8

$$k \geq 2$$

$$① \quad \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{(k-1)k} = \frac{1}{k^2 - k}$$

$$\text{car: } k^2 > k^2 - k$$

$$\text{donc } \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$② \quad \frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \quad k=2$$

$$\frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \quad k=3$$

$$\frac{1}{4^2} \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \quad k=4$$

$\vdots$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

on fait la somme ~~nombre à nombre~~ et on simplifie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &\leq \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k} = \frac{1}{k}$$

Series 2

Ex ①:

① a) $A^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$$= 7 - 4\sqrt{3} + 7 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}$$

$$= 14 - 2\sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2}$$

$$= 14 - 2\sqrt{49 - 48} = 14 - 2 = 12$$

$$A^2 = 12$$

ma: $7 - 4\sqrt{3} < 7 + 4\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} < \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

$$x < y$$

$$x - y < 0$$

$$A < 0$$

$$\text{et } A^2 = 12$$

$$\text{Alors } A = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$$

② $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1 - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

$$\text{Alors } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

↓ ③ $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \quad n=1$

$$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad n=2$$

$$\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \quad n=3$$

⋮

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \text{pour } n-1$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{pour } n$$

on fait le somme membre à membre et on simplifie:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Exercice 2

① $\frac{x^2-3x}{x-3} = 0$

L'expression $\frac{x^2-3x}{x-3}$ existe si et seulement si $x-3 \neq 0$
 $x \neq 3$

on a: $\frac{x(x-3)}{x-3} = 0$ éq $x = 0$

$$S_{\mathbb{R}} = \{0\}$$

② $\frac{x+2}{4x-2} < 1$

L'expression existe si $4x-2 \neq 0$

$$\text{soit } x \neq \frac{2}{4}$$

$$\text{soit } x \neq \frac{1}{2}$$

$$\frac{x+2}{4x-2} < 1 \text{ éq } \frac{x+2}{4x-2} - 1 < 0$$

$$\text{éq } \frac{x+2}{4x-2} - \frac{4x-2}{4x-2} < 0$$

$$\frac{x+2-(4x-2)}{4x-2} < 0$$

$$\frac{x+2-4x+2}{4x-2} < 0$$

$$\frac{-3x+4}{4x-2} < 0$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}^2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}^2} \\
 &= 1 + \frac{2\sqrt{6}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} = \frac{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)}{2(\sqrt{6} - 2)} \\
 &\text{or } \frac{1}{\sqrt{6} - 2} = \frac{\sqrt{6}^2 - 2^2}{2(\sqrt{6} - 2)} = \frac{6 - 4}{2(\sqrt{6} - 2)} \\
 &= \frac{2}{2(\sqrt{6} - 2)} = \frac{1}{\sqrt{6} - 2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ans } \frac{1}{\sqrt{6} - 2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{6} + 2} + \frac{1}{\sqrt{6} - 2}$$

Ex 4:

$$\textcircled{1} \quad a^2 = \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{2^2} = \frac{\sqrt{5}^2 + 1^2 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Also } a^2 + a - 1 &= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} + \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{4} - \frac{4}{4} \\
 &= \frac{6 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2 - 4}{4} = \frac{6 - 6}{4} = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Also } a^2 + a - 1 = 0$$

$$a^2 + a = 1 \Rightarrow a(1 + a) = 1$$

$$\text{Ans } 1 + a = \frac{1}{a}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{a}{a+1}} + \sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\frac{1}{a}}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{a}}{a}}$$

$$= \sqrt{a^2} + \sqrt{\frac{1}{a^2}} = |a| + \frac{1}{|a|} = a + \frac{1}{a}$$

$$= \cancel{a} + a + 1 = 2a + 1 = \sqrt{5} - 1 + 1 = \sqrt{5}$$

④/

Exercise 3 :

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad X &= \sqrt{\frac{4^{10} \times 2^{10} + 4^{10}}{4^4 \times 2^4 + 4^{11}}} = \sqrt{\frac{4^{10} (2^{10} + 1)}{4^4 (2^4 + 4^7)}} \\
 &= \sqrt{\frac{4^6 \times (2^{10} + 1)}{2^4 + (2^2)^7}} = \sqrt{\frac{4^6 \times (2^{10} + 1)}{2^4 + 2^{14}}} \\
 &= \sqrt{\frac{4^6 \times (2^{10} + 1)}{2^4 (1 + 2^{10})}} = \sqrt{\frac{4^6}{(2^2)^2}} = \sqrt{\frac{4^6}{4^2}} \\
 &= \sqrt{4^4} = (\sqrt{4})^4 = 2^4
 \end{aligned}$$

$$X = 2^4$$

$$\begin{aligned}
 Y &= \sqrt{[2 + (2 + \sqrt{3})][2 - (2 + \sqrt{3})]} \sqrt{(2 + \sqrt{3})\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{2^2 - (2 + \sqrt{3})^2} \times \sqrt{2\sqrt{2} + 2} \\
 &= \sqrt{4 - (2 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{2\sqrt{2} + 2} \\
 &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{2} + 2} \\
 &= \sqrt{(2\sqrt{2} + 2)(2 - \sqrt{3})} \\
 &= \sqrt{4\sqrt{3} - 4 + 4 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt{2\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$Y = \sqrt{2\sqrt{3}}$$

$$\textcircled{2} \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

(3/)