

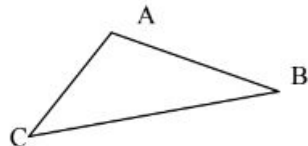
Exercice 1

Soit un triangle ABC .

1. Construire les points D et E vérifiant : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire géométriquement ?
3. Montrer que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA}$. Déduire de cette égalité et de la précédente que E , B et D sont alignés.
4. Soit I le milieu de $[AB]$. Justifier que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$. Qu'en déduire pour les droites (AE) et (CI) ?

Correction

1.



$$2. \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

On en déduit que $ABDC$ est un parallélogramme.

$$3. \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires, les points E , B et D sont alignés.

4. Comme I est le milieu de $[AB]$, on a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\text{D'où } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI}.$$

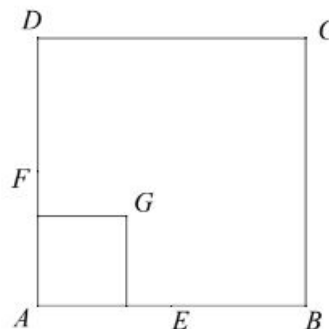
On en déduit que, comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, alors $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CI}$.

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CI}$ donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires. Les droites (AE) et (CI) sont parallèles.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré, E le milieu de $[AB]$, F le milieu de $[AD]$. On pose $AE = 1$.

1. Donner les coordonnées des points A , B , C , D , E et F dans le repère $(A ; \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF})$.
2. a. Ecrire l'équation de la droite (BF) .
b. Soit $G(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$. Montrer que G appartient à la droite (BF) .
3. Montrer que les points D , E et G sont alignés.
4. Que représente G pour le triangle ABD ? Justifier.
5. Que peut-on en déduire sur la droite (AC) ? Justifier.

**Correction**

1. $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(2; 2)$, $D(0; 2)$, $E(1; 0)$ et $F(0; 1)$.

2. a. Soit $M(x; y)$ un point du plan ; $M \in (BF)$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{MB} \text{ et } \overrightarrow{BF} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 0-2 \\ y-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 1(x-2) - (-2)y = x + 2y - 2 = 0 ;$$

D'où une équation de la droite (BF) : $x + 2y - 2 = 0$

b. On remplace x et y par les coordonnées de G : $\frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{3} - 2 = 0$; on déduit que G appartient à la droite (BF) .

3. Pour montrer que les points D , E et G sont alignés on peut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}-1 \\ \frac{2}{3}-0 \end{pmatrix} ; \det(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{EG}) = \begin{vmatrix} 1-0 & \frac{2}{3}-1 \\ 0-2 & \frac{2}{3}-0 \end{vmatrix} = 1 \times \frac{2}{3} - (-2) \times (\frac{2}{3}-1) = 0 \text{ donc les points } D, E \text{ et } G \text{ sont alignés}$$

alignés

4. (DE) est une médiane puisque E est le milieu de $[AB]$, de même (BF) est une médiane donc G est le centre de gravité du triangle ABD .

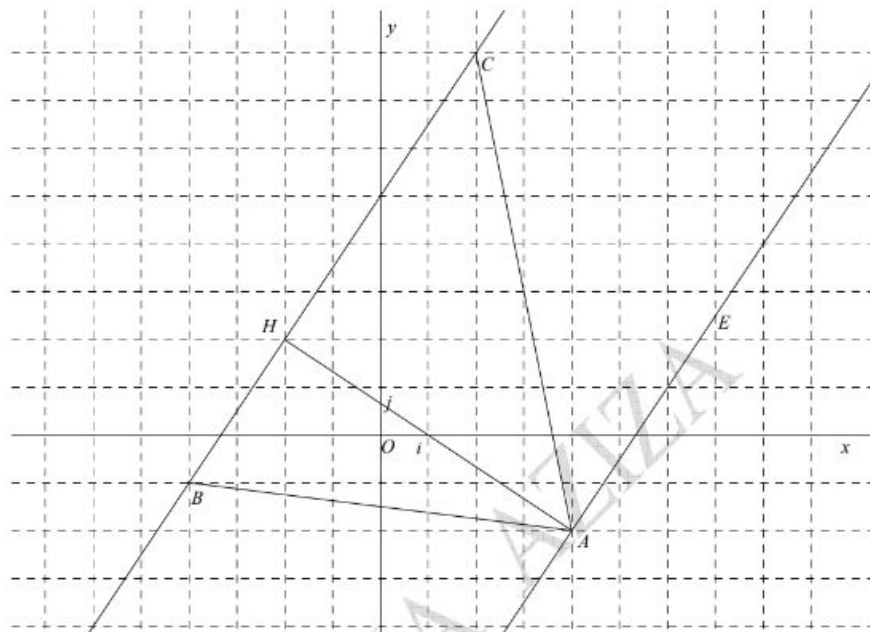
5. (AC) est la troisième médiane puisqu'elle passe par le centre du carré, soit par le milieu de $[DB]$. A , G et C sont alignés. En fait la droite (AC) a pour équation $y = x$ qui contient évidemment G .

Exercice 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points : $A(4; -2)$; $B(-4; -1)$; $C(2; 8)$ et $H(-2; 2)$.

1. Faire une figure et montrer que les points B , C et H sont alignés.
2. a. Calculer les distances AH , BH et AB .
b. Démontrer que le triangle AHB est rectangle en H .
3. Calculer l'aire du triangle ABC .
4. Soit (D) la droite qui passe par A et qui est parallèle à (BC) .
a. Déterminer une équation de (D) .
b. Le point $E\left(7; \frac{5}{2}\right)$ appartient-il à (D) ?
c. Quelle est l'aire du triangle BCE ?

Correction



Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(4; -2)$; $B(-4; -1)$; $C(2; 8)$ et $H(-2; 2)$.

1. B , C et H sont alignés : $\det(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BH}) = \begin{vmatrix} 2+4 & -2+4 \\ 8+1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0$.
2. a. $AH = \sqrt{(-2-4)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$, $BH = \sqrt{(-2+4)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$,
 $AB = \sqrt{(-4-4)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$.
b. Pythagore dans AHB : $AH^2 + BH^2 = 52 + 13 = 65 = AB^2$
3. Le triangle ABC a pour base BC et pour hauteur AH . Il suffit donc de calculer BC :
 $BC = \sqrt{(2+4)^2 + (8+1)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$ d'où l'aire du triangle ABC : $\frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{52} \cdot \sqrt{117} = 39$.
4. a. (D) passe par A et est parallèle à (BC) . Soit $M(x; y)$ un point du plan ; $M \in (BC)$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
 $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} x-4 & 6 \\ y+2 & 9 \end{vmatrix} = 9(x-4) - 6(y+2) = 0$; une équation de la droite (D) . $3x - 2y - 16 = 0$.
c. $E(7; \frac{5}{2})$ appartient à (D) ? $3 \times 7 - 2 \times \frac{5}{2} - 16 = 0$: on déduit que $E(7; \frac{5}{2})$ appartient à (D) .
d. L'aire du triangle BCE est la même que celle du triangle ABC ... (même base BC et même hauteur AH).

Exercice 4

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On considère les points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = 3 \overrightarrow{AD}$.

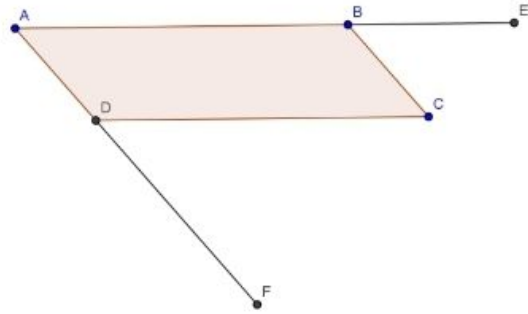
Faire une figure.

- b) Démontrer que : $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$ et que : $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BA} + 3 \overrightarrow{DA}$.

En déduire que les points C , E et F sont alignés.

Correction

a)



$$b) \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{De même, } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}$$

c) $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}$ donc $-\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DA}$. Or $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $3\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. D'où $3\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{EF}$. Par suite les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, donc les points C, E et F sont alignés.

Exercice 5 : Les questions sont indépendantes

Dans un repère on donne A (-2 ; 1), B (3 ; 3), C (-5 ; -3), D (5 ; 1) et T (0 ; -1). On nomme K le point de coordonnées (-1 ; y).

- 1) Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?
- 2) Les points C, D et T sont-ils alignés ?
- 3) Calculer le réel y tel que C, K et A soient alignés.
- 4) Calculer les coordonnées du point M tel que $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
- 5) Calculer les coordonnées du point E symétrique de T par rapport au point C. Le point R est le milieu de [AC]. Les points E, R, B sont-ils alignés ?

Correction

On a $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Donc on voit que $(-3) \times (-2) - (-4) \times 2 \neq 0$. D'où ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

1) On a $\overrightarrow{DT} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \end{pmatrix}$. Donc on voit que $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DT}$. D'où ces vecteurs sont colinéaires et les points D, T et C sont alignés (voire même, T est le milieu de [DC]).

2) On a $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} 1 \\ y-1 \end{pmatrix}$. Or on aura A, K et C alignés ssi $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires. C'est-à-dire ssi : $-3(y-1) - (-4) \times 1 = 0$. On résout cette équation : $-3y + 3 + 4 = 0$, $-3y = -7$, donc $y = \frac{7}{3}$.

3) On a $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -2-x \\ 1-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 3-x \\ 3-y \end{pmatrix}$. Donc on aura $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ssi les coordonnées du vecteur somme sont nulles. Or ce vecteur a pour coordonnées : $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} -4-2x+9-3x \\ 2-2y+9-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5x \\ 11-5y \end{pmatrix}$. D'où le système :

$$\begin{cases} 5-5x=0 \\ 11-5y=0 \end{cases} \text{ Par suite on a donc } M \left(1; \frac{11}{5}\right).$$

E sera symétrique de T par rapport à C ssi C est le milieu de [ET]. D'où les coordonnées de E (-10 ; -5).

R milieu de [AC] donc $R \left(-\frac{7}{2}; -1\right)$. On a $\overrightarrow{ER} \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB} \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}$. Donc on voit que $\overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$. D'où ces vecteurs sont colinéaires et les points E, R et B sont alignés (voire même, R est le milieu de [EB]).

Exercice 6 :

Soit ABC un triangle quelconque. A' le milieu de [BC], G le centre de gravité du triangle, D et E les points tels que

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}. \text{ On note I le milieu de [DE].}$$

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

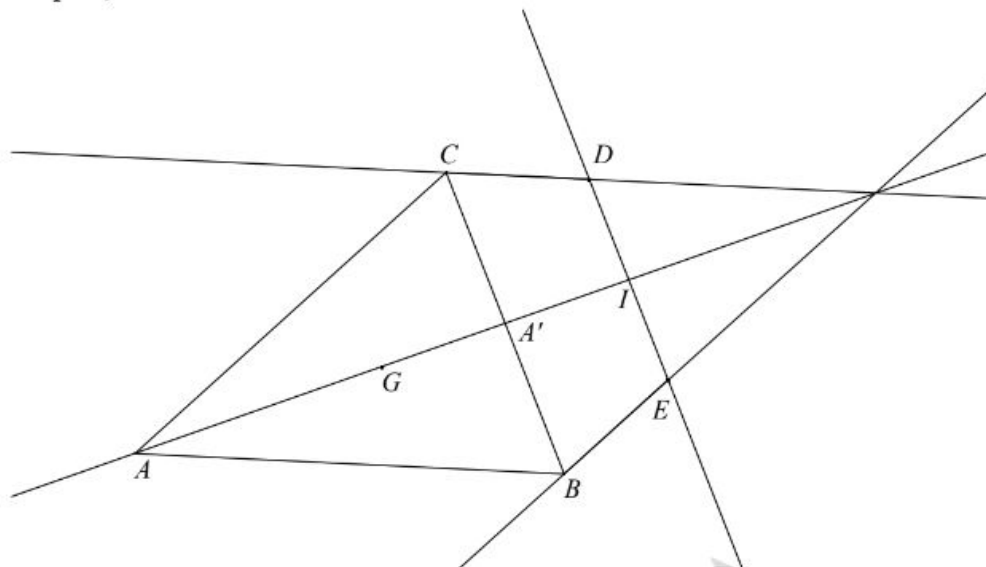
c. Démontrer que les points A, A' et I sont alignés.

2. Démontrer que le point G est le milieu de [AI].

3. Prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Correction

(On utilise un repère)



1. a. Prenons le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ où A a pour coordonnées $(0; 0)$, $B(1; 0)$ et $C(0; 1)$.

Des données de construction on tire que $E\left(1; \frac{1}{3}\right)$ et $D\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, soit $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ ou encore $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. Les coordonnées de A' sont $A'\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ d'où $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c. Calculons le déterminant des vecteurs : $\det(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AI}) = \begin{vmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{vmatrix} = 0$

On peut également remarquer que $2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AA'}$.

2. Les coordonnées de G sont $G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ d'où $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AG}$ et G est le milieu de $[AI]$.

3. $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{ED}) = \begin{vmatrix} 0-1 & \frac{1}{3}-1 \\ 1-0 & 1-\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$ donc les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Exercice 4

Correction en classe

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$, un repère orthonormé du plan. (Aucun schéma n'est demandé)

On considère les points $A(0, 4)$; $B(-2, 0)$ et $C(6, 1)$.

1) Montrer que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

2) a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

b) Déduire la nature du triangle ABC.

3) Soit $D(-6, 7)$. Les points A, C et D sont-ils alignés ?

4) Calculer les distances BC et BD. Déduire que le point B appartient à la médiatrice du segment $[CD]$.



Calcul Vectoriel – Serie N 1

2eme Sc et info

Exercice N° 1 : Soit A B C D un parallélogramme

- 1) Construire I et J tq $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$
- 2) Construire K tq A I K J soit un parallélogramme
- 3) Montrer que A,C et K sont alignés .

Exercice N° 2 : Soit ABC un triangle

- 1 - Construire les pts E,F et H tq

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

- 2 - Montrer que $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires

- 3 - Soit le pt M su plan tq $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$

a- Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

- b- Construire le pt M

- c- Soit I le milieu de [BC] , montrer que A , M et I sont alignés

- 4 - Déterminer et construire le pt G pour que A soit le centre de gravité de FGH



Exercice N° 3 : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé .

Soient A (1, 1) , B (4, 2) , C (2, -2) et D (3, 0)

- 1- Montrer que B , C et D sont alignés
- 2- Montrer que ABC est rectangle en A
- 3- Montrer que [AD] est la hauteur issue de A de triangle ABC