

 Exercice 1:

1) Soit ABC un triangle tel que $BC = 8\text{cm}$ et $AC = 7\text{cm}$ et $AB = 5\text{cm}$

et I le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(C, 1)$

Et $h_1: \begin{cases} P \rightarrow P' \\ M \rightarrow M' \end{cases}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$

a) montrer que h_1 est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport

b) construire le centre de h_1

2) La parallèle à la droite (BC) en I coupe le segment $[AB]$ en J

Où h désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$

a) déterminer $h(B)$ et $h(C)$

b) montrer que $h(BC) = (IJ)$ et que $IJ = 2\text{cm}$

c) déterminer $h(AB)$ avec justification

d) soit $K = B * C$ et la droite (AK) coupe le segment $[IJ]$ en E

Montrer que $h(K) = E$.

 Exercice 2: On donne un segment $[AB]$ tel que $AB = 4\text{ cm}$. Soit O le milieu de $[AB]$ et I le point de ce segment

tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

et h l'homothétie de centre I et de rapport -3 .

1/ Montrer que : $h(A) = B$.

2/ Soit C le point $\notin (AB)$. La parallèle à (AC) passant par B coupe (IC) en D .

a) Déterminer $h((AC))$ et $h((IC))$.

b) Montrer que : $h(C) = D$.

3/ Soit J le milieu de $[AC]$. Construire le point $J' = h(J)$ et en déduire que $J' = B * D$.

 Exercice 3: Soit ABC un triangle quelconque. On considère l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.

1-a/ Construire les points B' et C' images respectives des points B et C par h .

b/ Montrer que les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles

2/ Soit $I = B * C$. La droite (AI) coupe $(B'C')$ en J .

a/ Montrer que $h(I) = J$

b/ Déterminer le rapport

 Exercice 4: $P \rightarrow P'$

I) Soit l'application $f: M \mapsto M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = 5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$

1/ Montrer que f admet un seul point invariant I , que l'on précisera.

2/ Montrer que f est une homothétie que l'on caractérisera.

II) Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1/ Construire le point O tel que : $\overrightarrow{AO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2/ Montrer que $h_{(O,3)}(A) = B$.

3/ Déterminer $h_{(O,3)}((AD))$.

4/ Soit E le point d'intersection de (OC) et (AD) . Déterminer $h_{(O,3)}(E)$.

 Exercice 5:

Soit ABC un triangle et O un point de [AB] distinct de A et de B.

La parallèle à (OC) menée de B coupe (AC) en E, la parallèle à (BC) menée de E coupe (AB) en F et la parallèle à (BE) menée de F coupe (AC) en G.

Soit l'homothétie de centre A telle que $h(O)=B$.

1. (a) Déterminer $h((OC))$. En déduire que $h(C)=E$
 (b) Déterminer $h((BC))$. En déduire l'image de B par h.
 (c) Déterminer $h((BE))$. En déduire l'image de E par h.
2. (a) Montrer que (OE) et (BG) sont parallèles.
 (b) Les droites (BC) et (OE) se coupent en I et les droites (BG) et (EF) se coupent en J.
 Montrer que les points A, I et J sont alignés.

 **Exercice 6 :** O et I sont deux points fixes tels que $OI=3$, et C est le cercle de centre O et de rayon OI.

- 1) a) Construire O' l'image de O par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{-1}{2}$.
 b) Déterminer alors et construire C' l'image de C par l'homothétie $h_{\left(\frac{-1}{2}\right)}$.
- 2) M est un point variable de C distinct de I. La droite (IM) recoupe C' en N.
 a) Montrer que : $h_{\left(\frac{-1}{2}\right)}(M)=N$.
 b) En déduire l'ensemble des points N lorsque M varie sur $C \setminus \{I\}$.
- 3) a) Construire O'' tel que : $h_{\left(\frac{-2}{3}\right)}(O')=O''$.
 b) Déterminer alors et construire C'' l'image de C' par l'homothétie $h_{\left(\frac{-2}{3}\right)}$.
 c) C'' et (MN) se coupent en I et M''. Montrer que : $\overrightarrow{IM''} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IM}$.
 d) En déduire l'ensemble des points M'' lorsque M varie sur $C \setminus \{I\}$.

 **Exercice 7 :**

Construire un triangle ABC isocèle en A et tel que $AB=6$ cm. Soit G le milieu du segment [BC]

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

- 1) a) Construire $E = h(B)$ et $F = h(C)$.
 b) Montrer que AEF est isocèle en A.
- 2) La droite (AG) coupe le segment [EF] en G'.
 a) Déterminer $h(AG)$ et $h(BC)$.
 b) Déduire $h(G)=G'$ et que G' est le centre de gravité du triangle ABC.
- 3) Les droites (BF) et (CE) se coupent en J.
 Soit h' l'homothétie tel que $h'(B)=F$ et $h'(C)=E$.
 a) Montrer que J est le centre de h'.
 b) Déterminer le rapport de h'.
 c) Montrer que G, G' et J sont alignés.

 **Exercice 8 :** ABCD est un parallélogramme. Soit I, J les milieux respectifs des segments [BC] et [AD].

1. Déterminer et construire le point G barycentre de deux points pondérés (J, 1) et (I, -3).

2. Soit l'application $f: P \rightarrow P$

$$M \mapsto M' \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

- a- Montrer que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MJ} - 6\overrightarrow{MI}$
- b- En déduire que $\overrightarrow{MM'} = 4\overrightarrow{GM}$
- c- Montrer que f est l'homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.
 Déterminer et construire $f(I) = I'$. En déduire $f(BC)$

 **Exercice 9 :**

Soit ABC un triangle quelconque.

- 1/ a- Construire les points E et F tel que : $h_{(A, 1/4)}(B) = E$ et $h_{(A, 1/4)}(C) = F$

b- En déduire la position relative des droites (BC) et (EF).

2/ On pose $K = B * C$ et $L = E * F$. Montrer que : A, L et K sont alignés.

3/ [BF] et [CE] se coupent au point G. Déterminer et construire :

$$\bullet h_{(A,1/4)}((KL))$$

$$\bullet h_{(A,1/4)}((BF)) = \Delta$$

$$\bullet h_{(A,1/4)}((CE)) = \Delta'$$

4/ Soit $H = \Delta \cap \Delta'$, montrer que $h_{(A,1/4)}(G) = H$.

5/ Que-peut-on dire des points : A, L, K, G et H.

6/ soit le cercle ζ de centre G et de rayon 2. Déterminer $h_{(A,1/4)}(\zeta)$

Exercice 9:

Soit ABI un triangle rectangle et isocèle en I et soit O le milieu de [AB] et (C) le cercle de centre O circonscrit au triangle ABI. Soit h l'homothétie de centre I et de rapport -2.

Recopier et compléter le schéma.

1) a) Construire les points A' et B' image respectifs de A et B par h.

b) Montrer que le triangle A'B'I est isocèle et rectangle en I.

2) La droite (IO) coupe (A'B') en O'.

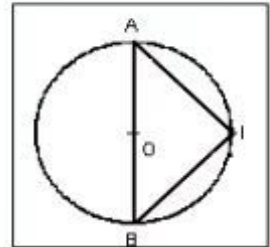
a) Montrer que O' est le milieu de [A'B'].

b) Caractériser et construire le cercle (C') image du cercle (C) par h.

3) La droite (OI) recoupe le cercle (C) en E. La droite passant par B' et parallèle à (BE) coupe (OI) en E'.

a) Déterminer $h((OI))$ et $h((EB))$.

b) En déduire que $h(E) = E'$ et que E' appartient au cercle (C').



Exercice 9:

Dans la figure ci-contre, ABC un triangle rectangle en A inscrit dans le cercle ζ ,

1) a) Construire O' l'image de O par

l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{2}$

b) Construire ζ' l'image de ζ par l'homothétie h

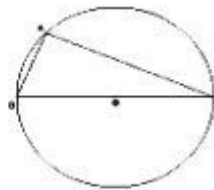
2) a) Soit I le symétrique de B par rapport à C, Montrer que C est

l'image de B par l'homothétie h' de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$

b) Montrer que $h'(\zeta) = \zeta'$

c) La parallèle à (AB) passant par C coupe (AI) en A', Montrer que $h'(A) = A'$

d) La droite (BC) recoupe ζ' en E, montrer que $(A'E) \perp (CA')$ et $(AC) \parallel (EA')$



Exercice 9:

Construire un triangle ABC isocèle et rectangle en A et soit I le milieu du segment [BC].

On considère l'homothétie h de centre A et de rapport 2.

1) Construire le point B' = h(B).

2) La droite passant par B' et parallèle à (BC) coupe (AC) en C'.

a) Déterminer h(AC) et h(BC).

b) En déduire que C' = h(C).

3) La droite (AI) coupe (B'C') en J.

a) Montrer que J est le milieu de [B'C'].

b) Montrer que BCJB' est un parallélogramme.

4) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et soit G' le point d'intersection de (AJ)

avec (B'C').

a) Montrer que $h(G) = G'$.

b) Déduire que I est le milieu de [GG'].

Exercice 9:

1) Déterminer x et y pour que $12x54y \in M2$ et $\in M11$.

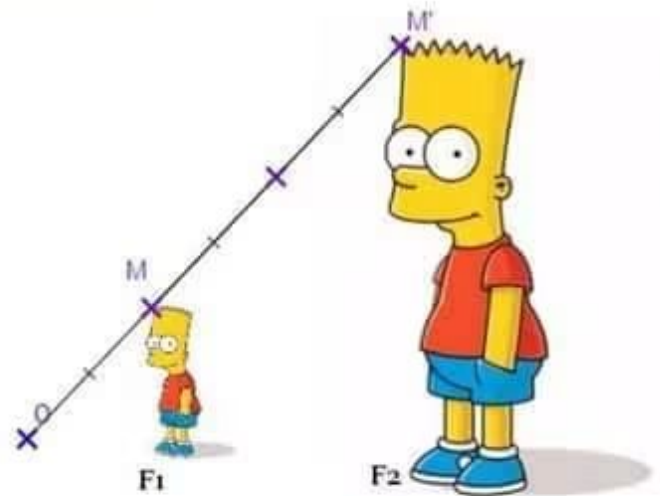
2) Soit l'entier $N = 3x48y$. Déterminer x et y pour que N soit divisible par 11 et le reste de la division euclidienne par 4 égal à 3.

HOMOTHÉTIE

1) Définition:

Activité

on donne la figure suivante



la figure **F2** est un agrandissement de rapport 3 de figure **F1**

la figure **F1** est une réduction de rapport $1/3$ de figure **F2**

on dit que la figure **F2** est l'image de la figure **F1**
par l'**homothétie** de centre **O** et de rapport **3**

on dit que la figure **F1** est l'image de la figure **F2**
par l'**homothétie** de centre **O** et de rapport $1/3$

Définition :

O est un point, k est un réel non nul.

On appelle homothétie de centre O et de rapport k la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$

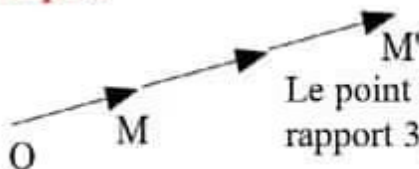
Remarque

Si on note h l'homothétie de centre O et de rapport k

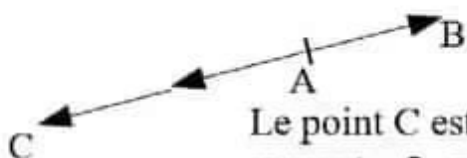
les énoncés suivants sont équivalents :

- M' est l'image de M par h
- $M' = h(M)$
- $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$

Exemples



Le point M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 3, en effet $\overrightarrow{OM'} = 3 \cdot \overrightarrow{OM}$.



Le point C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport -2 , en effet $\overrightarrow{AC} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

Le point B est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{-1}{2}$, en effet $\overrightarrow{AB} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{AC}$.

Cas particuliers :

Si $k = 1$ alors $h_{(I,1)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM}$ équivaut à $M' = M$.

$h_{(I,1)}$ est

Si $k = -1$ alors $h_{(I,-1)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$ équivaut à $I = M * M'$ équivaut à $S_I(M) = M'$.

$h_{(I,-1)}$ est

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{OM'} \text{ sont colinéaires}$$

$\Rightarrow$ les points O, M et M' sont alignés

Activité 4 page 131

Dans cette activité, on se propose de construire le centre d'une homothétie connaissant son rapport, un point et son image.

Soit A un point du plan et soit B son image par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$.

a) Montrer que I est le barycentre des points A et B affectés de coefficients -2 et 3 .

b) Construire le centre I.

Reponse

Activité 5 page 132

Soient A et B deux points distincts du plan et soit I le barycentre de (A, 1) et (B, 4).

Soit M un point du plan et M' le point défini par $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}$.

Reconnaître l'application f du plan qui associe au point M le point M'.

Reponse

Remarque

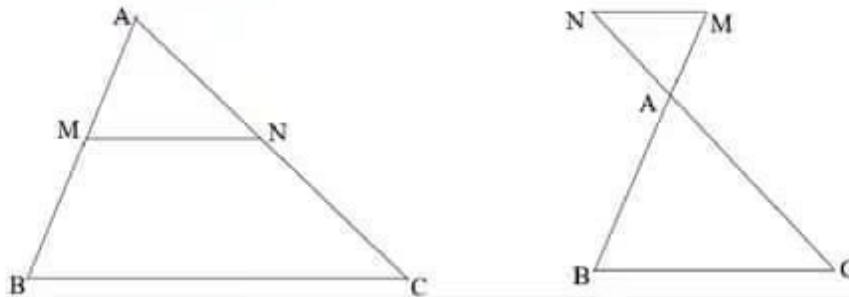
Si la droite D passe par le centre de l'homothétie, alors $D' = D$.

une homothétie h de centre O et de rapport $k \neq 1$ ne conserve pas la distance

3 - configuration de Thalès

Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC) .

Si (MN) est parallèle à (BC) , alors l'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme aussi C en N .



(les triangles AMN et ABC sont dits homothétiques, ils sont dans la configuration de Thalès)

Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en M .

Le point C se trouve à l'intersection des droites (AC) et (BC) . Son image par h sera donc à l'intersection des images de (AC) et (BC) .

L'image de (AC) est (AC) (droite passant par le centre de l'homothétie).

L'image de (BC) est une droite parallèle à (BC) passant par M image de B
c'est donc la droite (MN) .

L'image de C par h est donc l'intersection des droites (AC) et (MN) , c'est le point N .

relation vectorielle de thales

ABC un triangle . $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $(MN) \parallel (BC)$

si on a $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AN} = x \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = x \overrightarrow{BC}$

4- Image d'un cercle

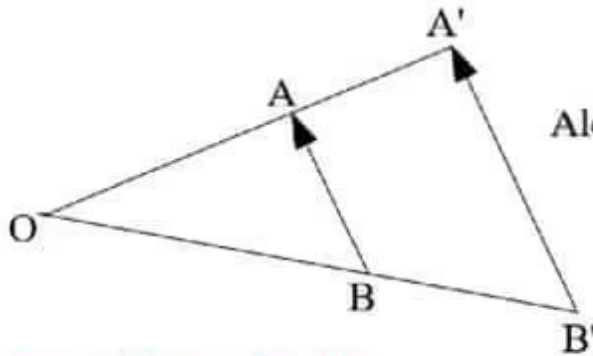
Un homothétie h de rapport k transforme un cercle de centre I et de rayon R en un cercle de centre I' et de rayon R' avec $I' = h(I)$ et $R' = |k| R$.

II) Propriétés :

1- Propriété fondamentale

Soient A et B deux points quelconques. Si $A'=h(A)$ et $B'=h(B)$, alors $\overrightarrow{A'B'}=k \cdot \overrightarrow{AB}$.

Démonstration



$$A' = h(A) \text{ alors } \overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$$

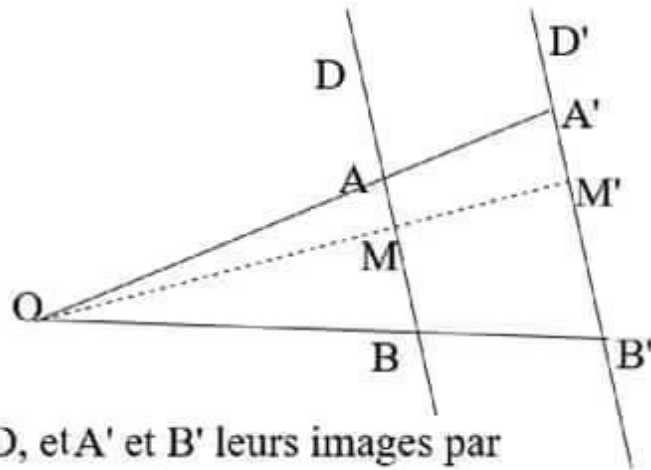
$$B' = h(B) \text{ alors } \overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \overrightarrow{A'B'} &= \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{AO} + k \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = k \cdot \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

2- Image d'une droite

Une homothétie transforme une droite D en une droite D' parallèle à D.

Démonstration



Soient A et B deux points de D, et A' et B' leurs images par l'homothétie de centre O et de rapport k .

Comme $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, la droite D' passant par A' et B' est parallèle à D.

Soit M un point de D. Montrons que $M' = h(M)$ est sur D'.

Il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AB}$.

Cela montre que A', B' et M' sont alignés, donc que M' est sur D'.

En prenant x dans $[0;1]$, cela montre aussi que le segment $[A'B']$ est l'image du segment $[AB]$.

Une homothétie transforme un segment $[AB]$ en un segment $[A'B']$

III) effets de l'homothétie

1- Distances, aires et volumes

Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

2- Conservation de l'alignement

Si A , B et C sont trois points alignés, leurs images A' , B' et C' par une homothétie sont aussi trois points alignés.

3- Conservation du parallélisme

Si D_1 et D_2 sont deux droites parallèles, leurs images D_1' et D_2' par une homothétie sont aussi des droites parallèles.

4- Conservation du barycentre

Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) , et si G' , A' et B' sont les images respectives de G , A et B par une homothétie, alors G' est le barycentre de (A', α) et (B', β) .

En particulier, les homothéties conservent les milieux.

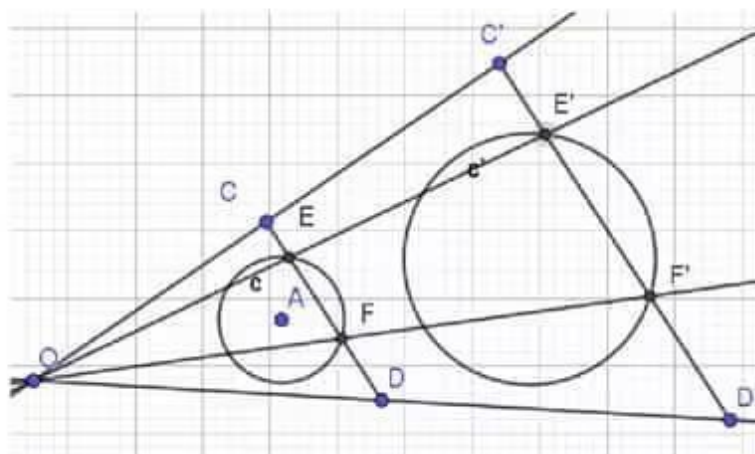
5- Conservation des angles

si A , B et C sont trois points distincts deux à deux, et si A' , B' et C' sont leurs images respectives par une homothétie, alors

En particulier, les homothéties conservent les angles droits, donc l'orthogonalité.

6- Conservation du contact

les homothéties conservent les points de contact



$$h(\zeta) = \zeta' \text{ et } h((CD)) = (C'D')$$

$$E = \zeta \cap (CD)$$

$$\begin{aligned} h(E) &= h(\zeta) \cap h((CD)) \\ &= \zeta' \cap (C'D') = E' \end{aligned}$$