

Exercice

1 Soit le polynôme $P(x) = ax^3 - 9x^2 + 7x + b$ on donne $P(-1) = -12$ et $P(0) = 6$

Montrer que $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

Vérifier que 3 est une racine de $P(x)$.

2 a Factoriser $P(x)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$, $P(x) = 0$

b Résoudre dans $\mathbb{R}$, $P(x) < 0$

d Résoudre dans $\mathbb{R}$, $P(x) \geq -3(x - 3)$

Exercice

1 Soient les polynômes suivants :

$$P(x) = -x^3 + 2x^2 + 11x - 12 \quad \text{et} \quad Q(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24$$

a Trouver une racine apparente de P

b Factoriser $P(x)$

c Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) \leq 0$

2 a Vérifier que 2 et -3 sont deux racines de Q .

b Factoriser $Q(x)$

c Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\frac{Q(x)}{x-2} \geq 0$

3 Soit le polynôme $A(x) = (x - 2)P(x) - (x - 1)Q(x)$

a Factoriser $Q(x)$

b En déduire le degré de A

Exercice

1 On donne $A(x) = -4x^4 + 20x^2 - 16$ et $B(x) = -2x^3 + 5x^2 - x - 2$

a Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $A(x) = 0$

b Factoriser $A(x)$

c Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $A(x) \geq 0$

2 a Vérifier que 2 est une racine de $B(x)$.

b Montrer que $B(x) = (x - 2)(-2x^2 + x + 1)$

c Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $B(x) \geq 0$

3 Soit F définie par : $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

a Déterminer le domaine de définition de f .

4 **b** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \frac{4(x+1)(x+2)}{2x+1}$

c Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq 1$

Exercice

1 Soit le polynôme P définie par $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$

2 **a** Vérifier que 2 est une racine de P . **b** En déduire une Factorisation du P .

b Etudier alors le signe $P(x)$.

3 Soit F définie par : $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 13x + 6}{2x^2 + x - 1}$

a Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f . **b** Simplifier $f(x)$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$ puis $\sqrt{f(x)} = \sqrt{\frac{x}{2}}$

Exercice

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 - 5x + 6 = 0$

2 Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

a Vérifier que $f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$.

b Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$

3 Soit $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

a Factoriser $t^2 - 5t + 4$

b En déduire que $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$

4 Soit $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

a Déterminer le domaine de définition de h

b Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h(x) = \frac{x-3}{x^2+3x+2}$

c Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $h(x) \geq 1$

Exercice N°1:

1) On a $P(x) = ax^3 + 9x^2 + 7x + b$

$$\begin{cases} P(-1) = -12 \\ P(0) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - 9 - 7 + b = -12 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$$

b) $P(3) = 2 \times 3^3 - 9 \times 3^2 + 7 \times 3 + 6$
 $= 54 - 81 + 21 + 6$
 $= 81 - 81$

$$P(3) = 0 \Rightarrow \text{Donc 3 est une racine de } P(x)$$

c) On a 3 est une racine de $P(x)$

$$\begin{aligned} \text{donc } P(x) &= (x - 3)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c \\ &= ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c \\ &= 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 3a = -9 \\ c - 3b = 7 \\ -3c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ \text{vérification} \\ c = -2 \end{cases}$$

Ainsi $P(x) = (x - 3)(2x^2 - 3x - 2)$

2/a-

$$P(x) = 0 \Rightarrow (x - 3)(2x^2 - 3x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m - 3 = 0 \text{ ou } 2m^2 - 3m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 3 \text{ ou } \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 8 \times 2$$

$$\Delta = 25 > 0$$

$$\Leftrightarrow m = 3 \text{ ou } m = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{3+5}{4} = 2$$

$$\text{ou } m = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

donc $S_R = \{-\frac{1}{2}; 2; 3\}$

$$b/ \quad P(m) < 0 \Rightarrow (m-3)(2m^2 - 3m - 2) < 0$$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	3	
m-3	-	-	-	0	+
$2m^2 - 3m - 2$	+	0	-	0	+
P(x)	-	0	+	0	+

Ainsi $S_R =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]2; 3[$

$$c) \quad P(x) \geq -3(m-3)$$

$$\Leftrightarrow (m-3)(2m^2 - 3m - 2) \geq -3(m-3)$$

$$\Leftrightarrow (m-3)(2m^2 - 3m - 2) + 3(m-3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-3)(2m^2 - 3m + 1) \geq 0$$

$$(*) \quad 2m^2 - 3m + 1 = 0 \quad ; \quad a+b+c=0 \quad ; \quad m_1=1 \quad ; \quad m_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$$

m	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	3	
m-3	-	-	-	0	+
$2m^2 - 3m + 1$	+	0	-	0	+
$(m-3)(2m^2 - 3m + 1)$	-	0	+	0	+

donc $S_R = [\frac{1}{2}; 1] \cup [3; +\infty[$

Prof: Mohamed HM

Exercice N°2:

$$1/a) P(m) = -m^3 + 2m^2 + 11m - 12$$

$$P(1) = -1 + 2 + 11 - 12$$

$$= 13 - 13$$

$$P(1) = 0$$

Donc 1 est une racine de P

b) On a 1 est une racine de P

$$\text{d'où } P(m) = (m-1)(am^2 + bm + c)$$

$$= am^3 + bm^2 + cm - am^2 - bm - c$$

$$= am^3 + (b-a)m^2 + (c-b)m - c$$

$$= -m^3 + 2m^2 + 11m - 12$$

Par identification

$$\begin{cases} a = -1 \\ b - a = 2 \\ c - b = 11 \\ -c = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \text{vérification} \\ b = 1 \\ c = 12 \end{cases}$$

Donc

$$P(m) = (m-1)(-m^2 + m + 12)$$

$$c) P(m) \leq 0 \Leftrightarrow (m-1)(-m^2 + m + 12) \leq 0$$

$$v) m-1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$d) -m^2 + m + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 + 4 \times 12 \Rightarrow \Delta = 49$$

$$m_1 = \frac{-1+7}{-2} = -3 \text{ ou } m = \frac{-1-7}{-2} = 4$$

m	-\infty	-3	1	4	+\infty
m-1	-	-	0	+	+
-m^2+m+12	-	0	+	+	0
P(m)	+	0	-	0	-

Alors

$$S_R = [-3; 1] \cup [4; +\infty[$$

$$2/a) Q(m) = m^4 + m^3 - 2m^2 + 4m - 24$$

$$Q(2) = 16 + 8 - 8 + 8 - 24 \Rightarrow Q(2) = 0$$

\(\Rightarrow\) 2 est une racine de Q

$$\begin{aligned} Q(-3) &= (-3)^4 + (-3)^3 - 2(-3)^2 + 4(-3) - 24 \\ &= 81 - 27 - 18 - 12 - 24 \\ &= 81 - 81 \end{aligned}$$

$$Q(-3) = 0 \Rightarrow (-3) \text{ est une racine de } Q$$

b) on a 2 et (-3) sont deux racines de Q

$$\begin{aligned} \text{Donc } Q(x) &= (x-2)(x+3)(ax^2+bx+c) \\ &= (x^2+x-6)(ax^2+bx+c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^3 + bx^2 + cx - 6ax^2 - 6bx - 6c \\ &= ax^4 + (b+a)x^3 + (c+b-6a)x^2 + (c-6b)x - 6c \\ &= x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24 \end{aligned}$$

Par identification

$$\begin{cases} a=1 \\ b+a=1 \\ c+b-6a=-2 \\ c-6b=4 \\ -6c=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=4 \end{cases}$$

Prof: Mohamed HM

$$\text{Donc } Q(x) = (x-2)(x+3)(x^2+4)$$

$$c) \frac{Q(x)}{x-2} \geq 0$$

condition d'existence

$$\text{Il faut que } x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\begin{aligned} x) \frac{Q(x)}{x-2} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+3)(x^2+4)}{(x-2)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x^2+4) \geq 0 ; (x \neq 2) \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$	—	0	+	+
x^2+4	+	+	+	+
$(x+3)(x^2+4)$	—	0	+	+

$$\text{Ainsi } S_{\mathbb{R}} = [-3; +\infty[\setminus \{2\}$$

$$\begin{aligned}
 3/ \quad A(m) &= (m-2)P(m) - (m-1)Q(m) \\
 &= (m-2)(m-1)(-m^2 + m + 12) - (m-1)(m-2)(m+3)(m^2+4) \\
 &= (m-1)(m-2)(-m^2 + m + 12 - m^3 - 4m - 3m^2 - 12) \\
 &= (m-1)(m-2)(-m^3 - 4m^2 - 3m) \\
 &= \underbrace{m}_{1} \underbrace{(m-1)}_{1} \underbrace{(m-2)}_{1} \underbrace{(-m^2 - 4m - 3)}_{1}
 \end{aligned}$$

On a: $d^0(m) = d^0(m-1) = d^0(m-2) = 1$

et $d^0(-m^2 - 4m - 3) = 2$

Donc $d^0(A) = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$

Exercice N°3:

1) a) $A(m) = -4m^4 + 20m^2 - 16$

$A(m) = 0 \Leftrightarrow -4m^4 + 20m^2 - 16 = 0$

On pose $X = m^2$ donc $A(X) = 0 \Leftrightarrow -4X^2 + 20X - 16 = 0$
(a + b + c = 0)

$\Leftrightarrow X = 1$ ou $X = \frac{c}{a} = 4$

$\Leftrightarrow m^2 = 1$ ou $m^2 = 4$

$\Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -1$ ou $m = 2$ ou $m = -2$

Donc $S_R = \{-2; -1; 1; 2\}$

b) $A(m) = -4(m+2)(m+1)(m-1)(m-2)$

c) $A(m) \geq 0 \Leftrightarrow -4(m+2)(m+1)(m-1)(m-2) \geq 0$

m	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$m+1$	-	-	0	+	+	+
$m+2$	-	0	+	+	+	+
$m-1$	-	-	-	0	+	+
$m-2$	-	-	-	-	0	+
$A(m)$	-	0	+	0	+	-

$S_R = [-2; -1] \cup [1; 2]$

2/a) on a $B(x) = -2x^3 + 5x^2 - x - 2$
 $B(2) = -2 \times 8 + 5 \times 4 - 2 - 2$
 $= 20 - 20$

$B(2) = 0$

Donc 2 est une racine de B

b) $B(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$
 $= ax^3 + bx^2 - 2ax^2 - 2bx - 2c + cx$
 $= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$
 $= -2x^3 + 5x^2 - x - 2$

Par identification

$$\begin{cases} a = -2 \\ b - 2a = 5 \\ c - 2b = -1 \\ -2c = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ \text{vérification} \\ c = 1 \end{cases}$$

Donc $B(x) = (x-1)(-2x^2 + x + 1)$

c) $B(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(-x^2 + x + 1) \geq 0$

a) $x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

b) $-x^2 + x + 1 = 0$ ($a+b+c=0$)

$x = 1$ ou $x = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+	+
$-2x^2+x+1$	-	0	+	0	-
$B(x)$	+	0	-	0	-

Donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [1; 2]$

d) a. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / B(x) \neq 0\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 1; 2\}$

$$b/ \quad f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{-4(m+2)(m+1)(m-2)(m-1)}{(m-2)(-2m^2+m+1)}$$

$$= \frac{-4(m+2)(m+1)(m-1)}{-2(m-1)(m+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{4(m+2)(m+1)}{2m+1} ; m \neq -\frac{1}{2} \text{ et } m \neq 1$$

$$c/ \quad f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{4(m+1)(m+2)}{2m+1} \geq 1 \text{ et } m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 1; 2\}$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)(m+2) \geq 2m+1 \text{ et } m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 1; 2\}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 8 - 2m - 1 \geq 0 \text{ et } m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 1; 2\}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 10m + 7 \geq 0 \text{ et } m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 1; 2\}$$

$$\Delta' = 5^2 - 4 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0 \text{ et comme } 4 > 0$$

$$\text{alors } 4x^2 + 10x + 7 > 0 \text{ Ainsi } S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 1; 2\}$$

Exercice N°4:

$$\text{On a } P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$$

$$1/ \quad P(2) = 2 \times 8 + 4 - 26 + 6$$

$$= 20 - 20$$

$$P(2) = 0 \Rightarrow 2 \text{ est une racine de } P$$

$$2/a) \quad P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$

$$= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$$

$$= 2x^3 + x^2 - 13x + 6$$

$$\text{Par identification } \begin{cases} a=2 \\ b-2a=1 \\ c-2b=-13 \\ -2c=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ \text{véri} \\ c=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-2)(2x^2 + 5x - 3)$$

b) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $\Delta = 49$

$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{4} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-5 - 7}{4} = -3$

x	$-\infty$	-3	$1/2$	2	$+\infty$
$x - 2$		-	-	-	+
$2x^2 + 5x - 3$	+	0	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

3) a) $f(x) = \frac{2x^2 + x^2 - 13x + 6}{2x^2 + x - 1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + x - 1 \neq 0\}$

o) $2x^2 + x - 1 = 0$ ($a - b + c = 0$)

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; \frac{1}{2}\}$

b) $f(x) = \frac{P(x)}{2x^2 + x - 1} = \frac{(x-2)(x+3)(2x-1)}{(x+1)(2x-1)}$

$f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x+1}; x \neq \frac{1}{2}$

4) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{x+1} > 0; x \neq \frac{1}{2}; x \neq -1$

x	$-\infty$	-3	-1	$1/2$	2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	-	-	0	+
$x + 3$	-	0	+	+	+	+
$x + 1$	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	-	0	+

Donc $S_R =]-3; 1[\cup]2; +\infty[$

$$b) \sqrt{f(x)} = \sqrt{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{2} \\ \text{et } f(x) \geq 0 \\ \text{et } \frac{x}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{x}{2} \\ \text{et } x \geq 0 \text{ et } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{x}{2} \\ \text{et } x \in [0; +\infty[\\ x \in [-3; -1[\cup [2; +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{x}{2} \\ \text{et } x \in [2; +\infty[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)(x+3)}{x+1} = \frac{x}{2} \\ x \in [2; +\infty[\end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{2x^2 + 2x - 12 - x^2 - x}{2(x+1)} = 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 = 0 \\ \text{et } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = 49$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$$

ou

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$$

Or $x \geq 2$ d'où $x = 3$

$$S_{\mathbb{R}} = \{3\}$$

Prof: Mohamed HM

Exercice 5

1) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1 > 0$

$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{6}{2} = 3$

$S_R = \{2; 3\}$

2) a) $(x-1)(x^2 - 5x + 6) = x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6$
 $= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
 $= f(x)$

b) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) \geq 0$

a) $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

e) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 3$

x	1	2	3
$x - 1$	-	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	-
P	-	+	+

Ainsi

$S_R = [1; 2] \cup [3; +\infty[$

3) a) $t^2 - 5t + 4$ ($a+b+c=0$) $\Rightarrow t' = 1$ et $t'' = 4$

$\Rightarrow t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$

b) $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$:

on pose $t = x^2 \Rightarrow g(t) = t^2 - 5t + 4$

$= (t-1)(t-4)$

Donc

$g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$

4/a -

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h(x) \text{ est définie ssi } g(x) \neq 0$$

$$\text{on pose } g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \text{ ou } x^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$$\text{donc } D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 1; 2\}$$

$$\begin{aligned} b - h(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{(x^2-1)(x^2-4)} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{x-3}{(x+1)(x+2)} \end{aligned}$$

$$h(x) = \frac{x-3}{x^2+3x+2}$$

$$c / h(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x^2+3x+2} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3-x^2-3x-2}{x^2+3x+2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2-2x-5}{x^2+3x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+5}{x^2+3x+2} \leq 0$$

$$*) x^2+2x+5 \quad (a=1; b'=1; c=5) \Rightarrow \Delta' = b'^2 - ac = -4 < 0$$

donc le signe de x^2+2x+5 est celui de $a = 1 > 0$

	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
x^2+2x+5	+	+	+	+
x^2+3x+2	+	0	-	0
x^2+2x+5	+	-	-	+
x^2+3x+2	+	-	-	+

$$S_R =]-2; -1[$$