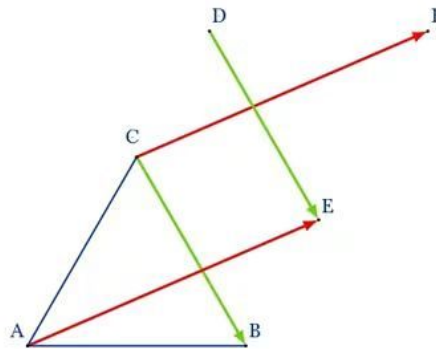


EX 1

Dans la figure ci-jointe on a considéré un triangle ABC équilatéral de coté 4, D le barycentre des points pondérés (A, -2) et C(, 5), $E = t_{\overrightarrow{CB}}(D)$ et $F = t_{\overrightarrow{AE}}(C)$.



- 1 a Déterminer $t_{\overrightarrow{CB}}((CD))$ et $t_{\overrightarrow{AE}}((CA))$.
- b Montrer que les points B, E et F sont alignés.
- 2 Soit l'application :

$$f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \mapsto M' \text{ telle que : } \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DB} - 5\overrightarrow{DC}.$$

Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- 3 La parallèle à (AB) passant par C coupe (BE) en G. Montrer que F est le barycentre des B et G affectés à des coefficients à déterminer.
- 4 Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre C et passant par A. Déterminer et construire le cercle $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par f .

EX 2

Soit ABCD un parallélogramme tel que le triangle ADC est rectangle en A. I et J les milieux respectifs de [AD] et [BC] et le point E ABEC est un parallélogramme. On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon AI. t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- 1 Déterminer $t(A)$ et $t(D)$ en déduire $t(I)$.
- 2 Déterminer et construire le cercle $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par t .
- 3 La droite (AB) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en A' et $\mathcal{C}'$ en B' . Montrer que $t(A') = B'$.
- 4 Déterminer l'image de la droite (AC) par t .
- 5 En déduire la position relative de la droite (BE) et $\mathcal{C}'$.

EX 3

Soit OAB un triangle équilatéral et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et passant par A. On désigne par I le point défini par : $\vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AB}$.

- 1 a Montrer que I est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, -3).
- b Faire une figure.
- c Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M tels que $\vec{MA} - 3\vec{MB}$ soit colinéaire au vecteur $\vec{BO}$.
- 2 Soit l'application :

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

$$M \longmapsto M' \text{ telle que : } 2\vec{MM'} = \vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MO}.$$

- a Montrer que f est la translation de vecteur $\vec{IO}$.
- b Construire $O' = f(O)$ puis $\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$.
- 3 Soit Δ la parallèle à (AB) passant par O. Δ coupe $\mathcal{C}'$ en D et E tel que $D \in [OE]$.
 - a Montrer que $f((AB)) = \Delta$.
 - b Montrer que $f(B) = D$ et $f(A) = E$.
 - c Soit H le projeté orthogonal de O sur (AB) et H' le projeté orthogonal de O' sur (DE). Montrer que $OH = O'H'$.

EX 4

Soit ABC un triangle équilatéral. I est le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].

- 1 Vérifier que $\vec{CA} + \vec{CB} = 2\vec{CI}$
- 2 Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$2\vec{MM'} = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}.$$

- a Déterminer $f(C)$.
- b Montrer que f est une translation de vecteur $\vec{CI}$.
- c Montrer que $f((AC)) = (IJ)$.
- 3 Soit Δ la droite perpendiculaire à (AB) menée de A coupant (IJ) en D.
 - a Montrer que $f((AD)) = (AD)$.
 - b Déduire $f(A)$.

EX 5

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles sécants en A et B de même rayon de centres respectifs O et O'. On pose I le milieu de [OO']. Soit l'application : $f : P \longrightarrow P; M \longmapsto M'$ tel que $\vec{OM'} = -3\vec{MO} + 2\vec{MI}$

- 1 a Montrer que f est une translation.
- b Justifier que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.
- 2 Soit C le point diamétralement opposé à A. La droite (CB) recoupe le cercle $\mathcal{C}'$ en C.
 - a Montrer que $f(C) = B$.
 - b Trouver $f(B)$.

- 13 On pose $f(A) = E$. Montrer que O' est le milieu de $[BE]$ puis placer E .
- 14 Soit M un point du cercle $\mathcal{C} \setminus \{A, C\}$ et J le milieu de $[AM]$. On pose $K = f(J)$. Sur quelle ligne fixe varie le point K ?

EX 6

Soit ABC un triangle, I le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 2)$.

- 1 a Construire le point I .
- b Montrer que C est le barycentre des points B et I affectés des coefficients à préciser.
- 2 Soit l'application :

$$t : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

$$M \longmapsto M' \text{ telle que : } 3\overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}.$$

- 3 Montrer que t est une translation. Caractériser la.
- 4 a Construire $D = t(B)$.
- b Déterminer et construire $\Delta = t(BC)$.
- 5 La droite (AI) coupe la droite Δ en J , Montrer que I est le milieu de $[AJ]$.
- 6 Soit E le barycentre des points pondérés $(J, 3)$ et $(D, -1)$. Montrer que $t(C) = E$.
- 7 Soit l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} \text{ tel que } \left\| \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{AI} \right\| = \frac{1}{3} \left\| \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right\| \right\}$.
- a Déterminer $\mathcal{C}$.
- b Déterminer et construire $\mathcal{C}' = t(\mathcal{C})$.
- c Montrer que $J \in \mathcal{C}'$.

EX 7

ABC est un triangle rectangle en A , on désigne par O le milieu de $[BC]$. Soient E le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, 1)$ et F le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(C, -1)$.

- 1 a Construire E et F .
- b les droites (CE) et (BF) se coupent en G . Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$, $(B, 1)$ et $(C, -1)$. c) Montrer que $(AG) \parallel (BC)$.
- 2 Soit l'application $f : P \longrightarrow P; M \longmapsto M'$ tel que $3\overrightarrow{M'A} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
Montrer que f est une translation dont on déterminera le vecteur.
- 3 Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[BC]$.
- a Construire son image $\mathcal{C}'$ par f .
- b Montrer que G appartient à $\mathcal{C}'$.
- 4 Le cercle $\mathcal{C}'$ coupe la droite (BC) en B' et C' ($C' \in [BC]$). La parallèle D_1 à (CE) issue de C et la parallèle D_2 à (BF) issue de B' se coupent en G' .
- a Déterminer $f((CE))$ et $f((BF))$.
- b Montrer que G est le milieu de $[AG']$
- c On suppose que B et C sont fixes et que A varie. Sur quelle ligne fixe se déplace le point G' ?

EX 8

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 2AB$. On désigne par O et I les milieux respectifs de [BC] et de [AB].

- 1 Construire E le barycentre des points pondérés (B,3) et (C,1).
- 2 Soit l'application

$$f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \mapsto M' \text{ telle que : } \overrightarrow{EM'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OE}.$$

Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

- 3 a Soit F l'image de A par f . Montrer que F est le barycentre de (A,1), (E,2) et (B,-2).
- b Les droites (OA) et (CI) se coupent en G. Montrer que G est le barycentre de (F,1) et (E,2)
- 4 Soit C le cercle circonscrit au triangle ABC et C' son image par f .
 - a Déterminer et construire C'.
 - b Montrer que $F \in C$.
 - c La perpendiculaire à (OA) passant par O recoupe C' en H. Montrer que $f(F) = H$.
- 5 Soit E' le projeté orthogonal de F sur (BC). Montrer que $E' = f(E)$.

EX 9

Soit IJKL un parallélogramme et E le milieu de [IJ]. La parallèle à (IK) passant par J et la parallèle à (EL) passant par K se coupent en F. Soit $\{T\} = (IK) \cap (EL)$ et $\{S\} = (JL) \cap (EK)$.

- 1 a Déterminer les images des droites (IK) et (EL) par $t_{\overrightarrow{IJ}}$.
- b Montrer que $t_{\overrightarrow{IJ}}(T) = F$.
- 2 a Montrer que $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{TS}$.
- b En déduire que les points F, T et S sont alignés.

EX 10

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point de $\mathcal{C}$. On note I le milieu de [OA]. Soit Δ la médiatrice du segment [OA], Δ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en B et F. Soit Δ' la droite passant par A et perpendiculaire à (AO).

- 1 Justifier que $\Delta' = t_{\overrightarrow{OI}}(\Delta)$.
- 2 soit l'application :

$$f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \mapsto M' \text{ telle que : } \overrightarrow{3MM'} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{IM'} + 2\overrightarrow{MA}.$$

- a Montrer que f est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OA}$
- b On donne $\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$ et O' le centre de $\mathcal{C}'$. Montrer que Δ' est une tangente commune aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
- 3 Soit C le symétrique de F par rapport au point O et $B' = f(B)$.
 - a Montrer que les points C, B et B' sont alignés.
 - b La droite (BB') recoupe le cercle $\mathcal{C}'$ en C'. Montrer que $f(C) = C'$.
- 4 Soient $D = t_{\overrightarrow{AF}}(C)$ et $E = t_{\overrightarrow{BA}}(D)$ Montrer que $F = t_{\overrightarrow{CB}}(E)$.

EX 11

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 2AB$. On désigne par O et I les milieux respectifs de [BC] et [AB].

- 1 Construire le point E barycentre des points pondérés (B,3) et (C,1).
- 2 Soit l'application :

$$f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \mapsto M' \text{ telle que : } \overrightarrow{EM'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OE}.$$

Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

- 3 a Soit F l'image de A par f . Montrer que F est le barycentre des points pondérés (A,1), (E,2) et (B,-2).
- b Les droites (OA) et (CI) se coupent en G. Montrer que G est le barycentre de (F,1) et (E,2).
- 4 Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et $\mathcal{C}'$ son image par f .
 - a Déterminer et construire $\mathcal{C}'$.
 - b Montrer que $F \in \mathcal{C}$.
 - c La perpendiculaire à (OA) passant par O recoupe $\mathcal{C}'$ en H. Montrer que $f(F) = H$.
- 5 Soit E' le projeté orthogonal de F sur (BC). Montrer que $E' = f(E)$.
- 6 Soit $\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que } 2\|\overrightarrow{M'F} + 2\overrightarrow{M'E'} - 2\overrightarrow{M'O}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}\| \text{ où } M' = f(M)\}$.
 - a Vérifier que $A \in \Gamma$.
 - b Déterminer Γ .

EX 12

On donne un triangle ABC rectangle et isocèle en A soient I le milieu de [BC], J le milieu de [AC] et K le milieu de [AB]. On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit l'application

$$t: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \mapsto M' \text{ telle que M est le barycentre des points pondérés (J,2), (I,-2) et (M',1)}.$$

- 1 Montrer que t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- 2 a Construire le point $E = t(I)$.
- b Déterminer et construire $\mathcal{C}' = t(\mathcal{C})$.
- 3 Soit le point F tel que $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$.
 - a Montrer que $F = t(K)$.
 - b Déterminer l'image de (BC) par t .
- 4 La droite (EF) coupe $\mathcal{C}'$ en deux points M et N avec $M \in [FE]$. Montrer que $t(C) = M$.

