

Exercice 1(3,5points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$ on considère les points

A , B ,C et D d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i ; z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i ; z_C = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ et } z_D = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

1)a)Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $a = -2 + i2\sqrt{3}$.

b)Déterminer sous forme algébriques les racines quatrièmes de a

c)Donner alors la nature du quadrilatère ABCD.

2)On considère dans C l'équation (E) : $z^2 + (1 - 2i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

a)Vérifier que (1) est une solution de (E).

b)En déduire l'autre solution de (E).

c)Résoudre alors l'équation (E ') : $z^8 + (1 - 2i\sqrt{3})z^4 - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

Exercice 2(6points)

1)On considère dans C l'équation (E) : $z^2 - 2z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

a)Vérifier que $\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

b)Résoudre dans C l'équation (E) .

2)Soit θ un réel de $]0 ; \pi[$, on considère dans C l'équation (E_θ) :

$z^2 - 2z - 2i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0$. Soit z_1 et z_2 les solutions dans C de l'équation (E_θ) .

a)Montrer que $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2} [2\pi]$ (sans résoudre (E_θ))

b) Vérifier que le discriminant de (E_θ) est $\Delta = 4e^{2i\theta}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points

A, M et N d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_M = 1 - e^{i\theta}$ et $z_N = 1 + e^{i\theta}$; θ un réel de $]0 ; \pi[$

a) Écrire z_M et z_N sous forme exponentielle.

b) Montrer que le quadrilatère $OMAN$ est un rectangle.

Exercice 3 (3,5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit a un réel de $]0, +\infty[$

On considère les points $A(0, 0, \sqrt{2})$, $M(a, 0, 0)$ et $N(0, \frac{4}{a}, 0)$

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{AM} \wedge \vec{AN}$

b) En déduire que l'aire $A(a)$ du triangle AMN est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}(a + \frac{4}{a})$

2) a) Montrer que les points O, A, M et N ne sont pas coplanaires

b) Montrer que le volume du tétraèdre $OAMN$ est $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Exercice 4 (7 points)

A) Soit la fonction f définie sur $]0, 2[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ de courbe représentative (C_f) de f dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement ce résultat

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, 2[$ et que pour tout réel x de $]0, 2[$,

$$f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}}$$

2) Montrer que f réalise une bijection de $[0, 2]$ sur un intervalle J à préciser

B) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = f(2\sin^2(x))$

1) Montrer que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \tan(x)$

2) a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, +\infty[$

b) Montrer que la fonction réciproque g^{-1} de g est dérivable sur $[0, +\infty[$

et que $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout réel x de $[0, +\infty[$.

3) Soit la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k^2}$

a) Justifier que la suite (x_n) est croissante.

b) Montrer que $\frac{1}{1+(k+1)^2} \leq (g^{-1})'(x) \leq \frac{1}{1+k^2}$ pour tout réel x de $[k; k+1]$

avec $k \in \mathbb{N}$

c) En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis montrer que

pour tout entier k de $\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{1+(k+1)^2} \leq g^{-1}(k+1) - g^{-1}(k) \leq \frac{1}{1+k^2}$.

d) Dédurre que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{1+n^2} + g^{-1}(n) \leq x_n \leq 1 + g^{-1}(n)$

e) Dédurre que la suite (x_n) est convergente vers un réel l

Bon travail