

Devoir de Synthèse n°2

Exercice N° 1 (4 points)

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10% des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60% d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passant une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20% d'entre eux sont admis à l'école.

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement : « Le candidat a été sélectionné sur dossier » .
- A l'évènement : « Le candidat a été admis à l'école ».

- 1 Traduire la situation par un arbre pondéré.
- 2 Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
- 3 Montrer que $p(A) = 0.24$.
- 4 On choisit au hasard un candidat admis à l'école.
Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Exercice N° 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct. On considère le plan P d'équation : $x+y-1=0$ et S la sphère de centre $I(3,2,1)$ et tangente au plan P en un point A .

- 1
 - a Calculer la distance de I au plan P . En déduire que le rayon de S est $2\sqrt{2}$
 - b Vérifier que le point A est de coordonnées $(1,0,1)$.
- 2 Soient le point $B(3,0,3)$ et le plan Q tangent à la sphère S en B .
 - a Montrer que Q est d'équation : $y-z+3=0$.
 - b Prouver que les plans P et Q sont sécants et non perpendiculaires.
 - c Donner une représentation paramétrique de la droite D intersection de P et Q .
- 3 Soit R le plan qui coupe la sphère S selon le cercle de diamètre $[AB]$. Déterminer une équation cartésienne de R .
- 4 On pose (Δ) la droite d'intersection des deux plans R et Q .
 - a Vérifier qu'une représentation paramétrique de (Δ) est :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 6 - t. \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
 - b Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère S en B .
 - c Déterminer la position relative de (Δ) et P .

Exercice N° 3 (5 points)

Dans la **figure de l'annexe ci-jointe**, (C) est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f dérivable sur $]0, +\infty[$ et (Γ) est la courbe d'une primitive F de f sur $]0, +\infty[$.

- La courbe (C) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$ et une asymptote d'équation $x = 0$.
- La courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$
- L'aire de la partie hachurée est égale à $\frac{e^2 - 3}{4}$.

1 En utilisant le graphique et les informations fournies :

a Donner $f'(1)$, $F'(1)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$,

b Calculer l'intégrale $I = \int_1^e f(x) dx$

2 Soit G la restriction de la fonction F sur $[1, +\infty[$

a Montrer que G réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note G^{-1} la fonction réciproque de G .

b G^{-1} est-elle dérivable à droite en -1 ? Justifier.

c Tracer dans la figure de l'annexe la courbe (Γ') de G^{-1}

3 On pose $H = \int_1^e F(x) dx$ et $K = \int_1^e x f(x) dx$

a Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $K = 1 - H$.

b Donner alors la valeur exacte de K .

Exercice N° 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 \ln(x+1)$. On désigne par (C_f) la courbe représentative dans un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

1 a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

b Calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

2 Montrer que pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x(x+1) \ln(x+1) + x^2}{x+1}$.

3 On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f'

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

a dresser le tableau de variation de f .

b Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 .

- c Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x > -1$.
En déduire que le point O est un point d'inflexion de (C_f)
- d Construire la courbe (C_f)

Dans la suite, on pose $I_0 = \int_0^1 \ln(x+1) dx$ et pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$

- 4 a Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $I_0 = -1 + 2 \ln 2$
- b Vérifier que pour tout $x > -1$, $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$
- c En déduire à l'aide d'une intégration par partie que $I_1 = \frac{1}{4}$
- 5 a Vérifier que la fonction $x \mapsto (x+1) \ln(x+1) - x$ est une primitive sur $] -1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$
- b Montrer que pour tout $n \geq 1$, $(n+2)I_{n+1} = -1 + 2 \ln 2 + \frac{n+1}{n+2} - (n+1)I_n$
- c En déduire la valeur de I_2
- d Déduire, en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Nom et prénom classe

Exercice N°3

